Ein Differential-Interferometer und seine Anwendung zur Bestimmung von Elektronendichtegradienten.

A. Heiss

IPP 1/25 Juni 1964

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Ein Differential-Interferometer und seine Anwendung zur Bestimmung von Elektronendichtegradienten.

A. Heiss

IPP 1/25 Juni 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Inhaltverzeichnis

			Seite
		Zusammenfassung	1
I)		Einleitung, Problemstellung . . .	1
II)		Die Dispersion im Plasma	2
III)		Zusammenhang zwischen Elektronendichte und Interferenzstreifenverschiebung	6
IV)		Das Differentialinterferometer	
	1)	Einleitung	10
	2)	Das Wollaston - Prisma	13
	3)	Der Strahlengang	23
	a)	Gegenstandsort der Interferenzen . .	24
	b)	Gangunterschied am Gegenstandsort, Streifenabstand	31
	4)	Kohärenz	36
	5)	Anwendungsbereich des Differentialinterferometers	37
	6)	Empfindlichkeit des Differentialinterferometers	40
	7)	Entstehung der Schmierbilder Methode der Auswertung	42
V)		Anwendung des Differentialinterferometers zur Messung von Elektronendichtegradienten an einem Thetapinch . .	46
	1)	Meßanordnung	46
	2)	Messungen und ihre Diskussion	
	A)	Interferometrische Aufnahmen . . .	53
	a)	Schmierkamera - Aufnahmen	

b) Moment - Aufnahmen 55

B) Schlieren - Momentaufnahmen 58

C) Diskussion der Ergebnisse 59

Literaturverzeichnis

Zusammenfassung

Nach einigen grundsätzlichen Bemerkungen über die Anwendung von Interferenzmethoden in der Plasmaphysik und die Aufgabe, die in diesem Zusammenhang das Differentialinterferometer erfüllen soll, folgt die Beschreibung des Aufbaus und der Wirkungsweise desselben. Die Anwendung für Messungen am Plasma wird beschrieben und die dafür zu erfüllenden Bedinggungen werden diskutiert.

Zum Abschluß werden einige Experimente am Plasma mit dem Differentialinterferometer gebracht.

I Einleitung, Problemstellung

Durch die Anwendung von Interferenzmethoden in der Plasmaphysik besteht die Möglichkeit der Bestimmung von Elektronendichten im Plasma [1]. Die interferometrischen Messungen wurden bisher am Mach - Zehnder - Interferometer durchgeführt [2], [3], [4]. Dieses ermöglicht eine direkte Bestimmung der Elektronendichte, da nur ein Teilbündel durch das Plasma geht, während das andere unbeeinflußt bleibt. In Gebieten, wo eine Änderung des Brechungsindex senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung auftritt, durchläuft das Licht eine gekrümmte Bahn. Diese Krümmung ist zwar geometrisch vernachlässigbar, (z. B. ist bei $\lambda = 5461$ Å und einem Elektronendichtegradienten von 10^{17} cm^{-4} und 1 m Entladungslänge die lineare Abweichung 2/3 mm) doch bedingt sie gegenüber dem Vergleichsstrahl des anderen, kohärenten Teilbündels eine zusätzliche Phasenverschiebung [2].

Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, wenn die beiden kohärenten Teilbündel eng benachbart durch das Plasma gehen. Dann erfahren sie annähernd dieselbe Krümmung und die Phasensprünge der Teilbündel unterscheiden sich nicht merklich. Eine Steifenverschiebung wird

dann nicht durch den Brechungsindex selbst, sondern durch dessen Gradienten verursacht.
Von G. Nomarski [5] wurde ein Prinzip angegeben, mit dem dies erreicht werden kann. Mit Hilfe der Doppelbrechung in optisch einachsigen Kristallen (Quarz) wird polarisiertes Licht in zwei kohärente, im Meßraum nahezu parallele Teilbündel aufgespalten. Diese werden nach Passieren eines Analysators zur Interferenz gebracht. Die auf diesem Prinzip beruhende Interferometeranordnung wird mit Differentialinterferometer (Abk.: D. - I.) bezeichnet [6].
Ein Interferometer dieser Art wurde gebaut und für die Verwendung zu Messungen am Plasma erprobt. Die ausführliche Beschreibung des D.-I. erfolgt im Abschnitt IV.

II Die Dispersion im Plasma

Die Anwendbarkeit der Interferenzmethode auf das Plasma beruht auf dessen Dispersionseigenschaften. Da das Plasma stets aus mehreren Komponenten besteht, ist zunächst darauf einzugehen, inwieweit die einzelnen Komponenten zur Dispersion beitragen.
Im allgemeinen besteht das Plasma (es sei ein Deuteriumplasma vorausgesetzt) aus:

1) Elektronen
2) Ionen
3) Angeregten Atomen
4) Molekülen
5) Verunreinigungen

Die Änderung des Brechungsindex gegenüber dem Ausgangszustand setzt sich also zusammen aus

$$\Delta n = \Delta n_e + \Delta n_{D^+} + \Delta n_D + \Delta n_{D_2} + \Delta n_\gamma \qquad (1)$$

Das letzte Glied ist ein Dämpfungsglied, das durch Stöße bedingt ist.
Es läßt sich zeigen, daß die Einflüsse der Ionen, der nicht angeregten Moleküle und der Stöße vernachlässigbar sind [2], ebenso die eventuell in geringem Maße auftretenden Verunreinigungen [3]. Nur der Einfluß der angeregten Atome kann, in einem gewissen Temperaturbereich, den der Elektronen größenordnungsmäßig erreichen.
Bei dem im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Plasma (Temperatur um $2 \cdot 10^4$ °K) braucht aber der Einfluß der angeregten Atome nicht berücksichtigt werden. Aus der zitierten Arbeit [2] läßt sich entnehmen, daß die Plasmatemperatur außerhalb des kritischen Bereichs ist. Die Lage der Interferenzstreifen vor der Entladung kann also als Nullmarkierung benützt werden.
Der von den Elektronen gegebene Beitrag zur Dispersion wird durch eine Formel angegeben, die die Kreisfrequenz und den Wellenzahlvektor in Beziehung setzt [7]. Unter der verallgemeinernden Annahme, daß sich die elektromagnetische Welle längs eines Magnetfeldes im Plasma ausbreitet, und bei Vernachlässigung von Dämpfungsmechanismen, lautet die Dispersionsbeziehung

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{V_{ph}^2} = n^2 = 1 - \frac{\omega_i^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ci})} - \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ce})} \qquad (2)$$

Dabei ist

ω = (Kreis-) Frequenz der elektromagnetischen Welle (sec^{-1})

k = Wellenzahlvektor (cm^{-1})

c = Lichtgeschwindigkeit (cm sec^{-1})
v_{ph} = Phasengeschwindigkeit (cm sec^{-1})
n = Brechungsindex
ω_i, ω_e = Ionen- bzw. Elektronenplasmafrequenz (sec^{-1})
ω_{ci}, ω_{ce} = Ionen- bzw. Elektronenzyklotronfrequenz (sec^{-1})

wobei

$$\omega_{i,e}^2 = \frac{4\pi Z e^2 N_{i,e}}{m_{i,e}} \tag{3}$$

und

$$\omega_{ci,ce} = \frac{ZeB}{m_{i,e}} \tag{4}$$

Es wird das Gaußsche Maßsystem verwendet.

e = Elementarladung N = Dichte (cm^{-3})
Z = Ionisationsgrad m = Masse (g)
B = Magnetische Kraftflußdichte

Es läßt sich zeigen, daß unter den vorauszusetzenden Bedingungen gilt

$$\omega_{ci} \ll \omega \tag{5}$$

$$\omega_{ce} \ll \omega \tag{6}$$

Wegen $\frac{m_e}{m_i} \ll 1$ ist auch

$$\omega_i^2 \ll \omega_e^2 = \omega_p^2 \tag{7}$$

Deshalb vereinfacht sich (2) zu der Eccles´schen Formel

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{8}$$

Da $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1$, ergibt sich für (8) nach Einsetzen des Ausdrucks für ω_p^2 und Bildung der Wurzel

$$n = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{\pi m_e c^2} \lambda^2 N_e \tag{9}$$

$$= 1 - \sigma N_e \qquad \left(\sigma = \frac{e^2 \lambda^2}{2\pi m_e c^2}\right) \tag{10}$$

In Zahlen:

$$n = 1 - 4{,}48 \cdot 10^{-14} \lambda^2 N_e \tag{11}$$

Bei der Umformung von (8) in (9) wurde die Beziehung

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} \tag{12}$$

benützt. In (11) ist λ in cm und N_e in cm^{-3} einzusetzen. Für $\lambda = 5461$ Å $= 5{,}461\ 10^{-5}$ cm ergibt sich

$$n = 1 - 1{,}34 \cdot 10^{-22} N_e \tag{13}$$

Da bei Interferenz nur die Phase einer Welle bedeutsam ist, spielt die Gruppengeschwindigkeit keine Rolle. Wegen der stets vorhandenen endlichen Linienbreite monochromatischen Lichts treten zwar nur endlich begrenzte Wellenzüge auf, die sich überlagern, doch

ist deren Länge in der Regel ein großes Vielfaches der Wellenlänge wegen der geringen relativen Halbwertsbreite (maximal 1/40 etwa).

III Zusammenhang zwischen Elektronendichte und Interferenzstreifenverschiebung.

Die beobachtbare Verschiebung von Interferenzlinien gegenüber dem Nullzustand gibt die Mögichkeit, auf die Elektronendichte zu schließen. Beim Mach - Zehnder - Interferometer ist die Streifenverschiebung proportional zur Elektronendichte, beim D.-I. ist die Streifenverschiebung proportional zum Dichtegradienten der Elektronen. Dabei wird die in der Regel zylinderförmige Plasmasäule in Längsrichtung beobachtet (s. Abb. 1). Die Dispersionsformel (2) hat diese Beobachtungsart zur Voraussetzung.

Die Zahl der Steifenverschiebungen ist unabhängig von dem verwendeten Interferenzsystem durch

$$z = \frac{\text{Änderung der optischen Wegdifferenz der Teilbündel}}{\text{Vakuumwellenlänge}} \qquad (14)$$

gegeben.

Beim Mach - Zehnder - Interferometer bleibt ein Teilbündel unverändert. Es ist also nur die Änderung des optischen Weges bei dem durch das Plasma gehenden Teilbündel zu beachten.

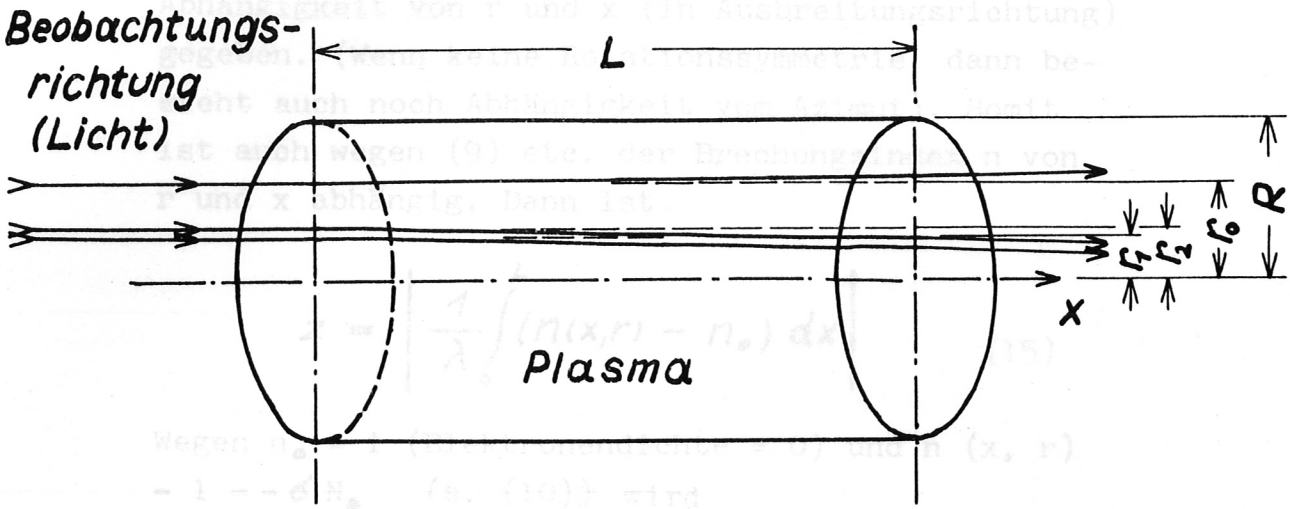


Abb. 1 Beobachtungsrichtung im Plasma.
Das Licht durchsetzt die Plasmasäule in axialer (x-) Richtung. Der Abstand von der Symmetieachse ist mit r bezeichnet. R = Radius, L = Länge der Plasmasäule. Auf Grund von Inhomogenitäten wird das Licht verschieden abgelenkt (s. a. Abb. 3)

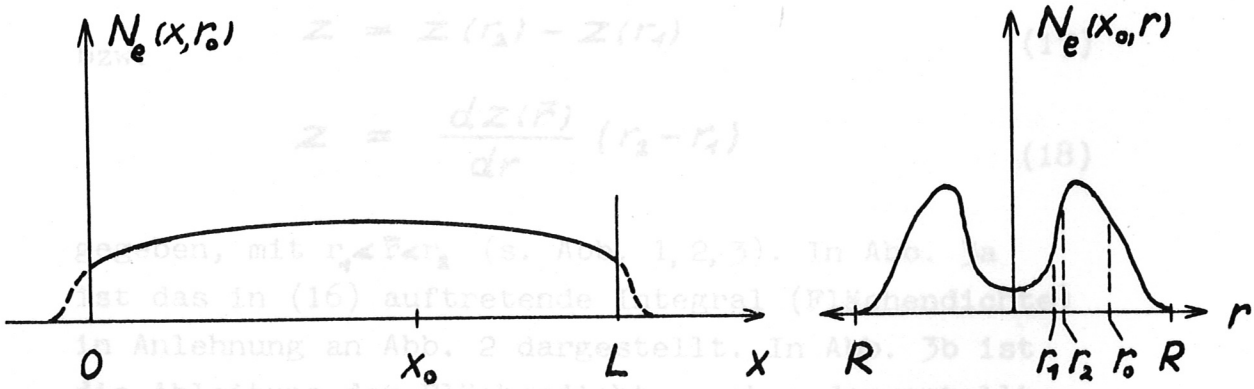


Abb. 2 Beispiel für eine mögliche radiale und axiale Verteilung der Elektronen in einem zylindrischen Plasma.

In Abb. 2 ist eine Elektronendichteverteilung in Abhängigkeit von r und x (in Ausbreitungsrichtung) gegeben. (Wenn keine Rotationssymmetrie, dann besteht auch noch Abhängigkeit vom Azimut). Somit ist auch wegen (9) etc. der Brechungsindex n von r und x abhängig. Dann ist

$$z = \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^L (n(x,r) - n_0)\, dx \right| \qquad (15)$$

Wegen $n_0 = 1$ (Elektronendichte = 0) und n (x, r) $- 1 = -\sigma N_e$ (s. (10)) wird

$$z = \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^L N_e(x,r)\, dx = z(r) \qquad (16)$$

Das in (16) auftretende Integral ist die Flächendichte der Elektronen.
Beim Differentialinterferometer ist die optische Wegdifferenz der benachbarten Teilbündel am Anfang Null. Für jedes Teilbündel ändert sich der optische Weg gemäß (15) bzw. (16) und die Zahl der Streifenverschiebungen ist durch

$$z = z(r_2) - z(r_1) \qquad (17)$$

bzw.

$$z = \frac{dz(\bar{r})}{dr} (r_2 - r_1) \qquad (18)$$

gegeben, mit $r_1 < \bar{r} < r_2$ (s. Abb. 1, 2, 3). In Abb. 3a ist das in (16) auftretende Integral (Flächendichte) in Anlehnung an Abb. 2 dargestellt. In Abb. 3b ist die Ableitung der Flächendichte nach r dargestellt. Beim M. - Z.- I. ist die Streifenverschiebung durch Abb. 3a, beim D. - I. durch Abb. 3 b bestimmt.

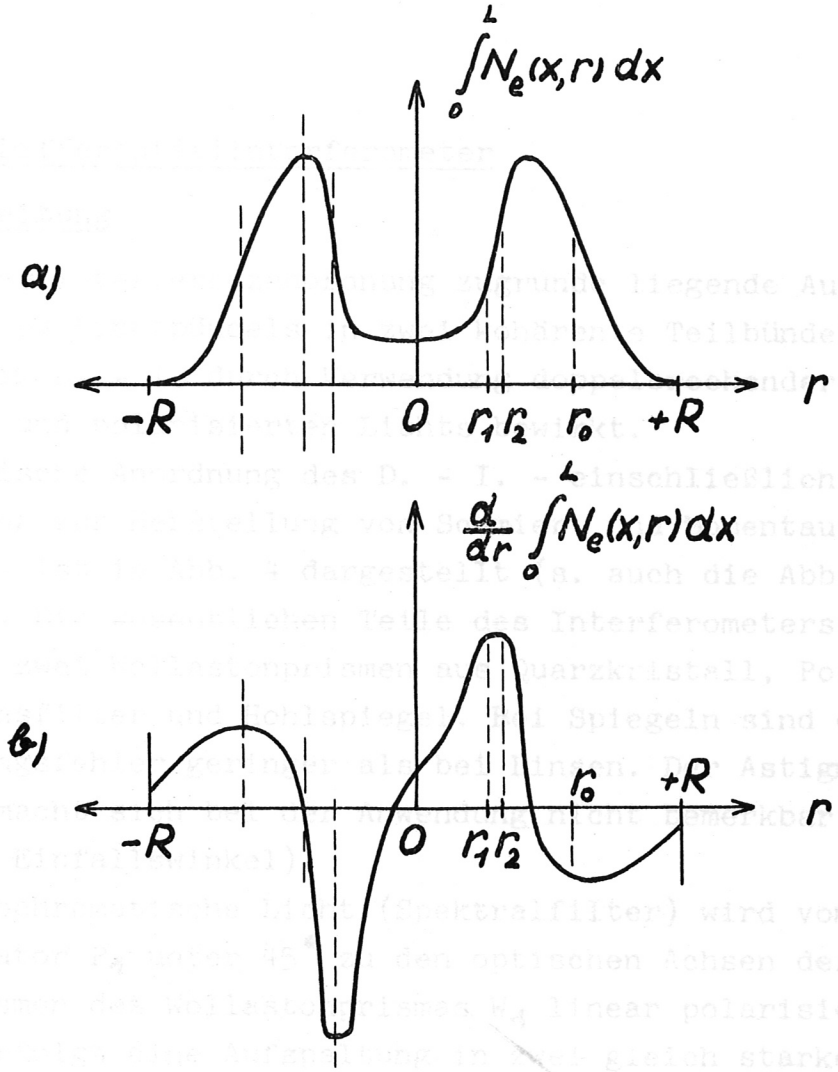


Abb. 3 Beispiel für eine Flächendichte über r und ihre Ableitung nach r. Es wurde keine genaue Symmetrie angenommen.

Wegen der Integration über die Beobachtungsrichtung können die an den Enden auftretenden Inhomogenitäten nicht erfaßt werden. (s. Abb. 2). Sie können aber vernachlässigt werden. Auch die Änderung des Austrittswinkels an den Enden ist vernachlässigbar [2].

IV Das Differentialinterferometer

1) Einleitung

Die jeder Interferenzanordnung zugrunde liegende Aufteilung eines Lichtbündels in zwei kohärente Teilbündel wird beim D. - I. durch Verwendung doppelbrechender Prismen und polarisierten Lichts bewirkt.
Die optische Anordnung des D. - I. - einschließlich der Anordnung zur Herstellung von Schmier- und Momentaufnahmen - ist in Abb. 4 dargestellt (s. auch die Abb. 11 und 13). Die wesentlichen Teile des Interferometers sind je zwei Wollastonprismen aus Quarzkristall, Polarisationsfilter und Hohlspiegel. Bei Spiegeln sind die Abbildungsfehler geringer als bei Linsen. Der Astigmatismus macht sich bei der Anwendung nicht bemerkbar (kleine Einfallswinkel).
Das monochromatische Licht (Spektralfilter) wird vom Polarisator P_1 unter 45° zu den optischen Achsen der Teilprismen des Wollastonprismas W_1 linear polarisiert. In W_1 erfolgt eine Aufspaltung in zwei gleich starke, senkrecht zueinander polarisierte Komponenten, die unter einem kleinen Divergenzwinkel 2ε aus W_1 austreten und an den Spiegeln S_1 bzw. S_2 reflektiert werden. Zwischen S_1 und S_2 laufen die so entstandenen Teilbünnahezu parallel. Im Wollastonprisma W_2 tritt eine nochmalige Ablenkung der Teilbündel auf, wodurch der Ursprungsort der Teilbündel örtlich von der Lichtquelle getrennt wird. Bei symmetrischer Anordnung der Prismen zu den Spiegeln kommt er in die Mitte zwischen S_1 und S_2 zu liegen. Der nach W_2 angebrachte Analysator P_2 macht die Teilbündel interferenzfähig. Er ist entsprechend wie P_1 (unter 45°) angebracht. Es können sich dann Komponenten gleicher Amplitude überlagern. Reelle Interferenzen können also erst hinter P_2 beobachtet werden. Sie treten am schärfsten an den Bildorten ihres virtuellen Dingortes auf.

Abb. 4 (s. nächste Seite)
Differentialinterferometer (schematisch) mit Anordnung zur Messung der zeitlichen Änderung der Streifenverschiebung über einen Durchmesser des Entladungsgefässes mit Drehspiegel.
f_1, f_2, f_3 sind Linsen zur Abbildung der Lichtquelle und Int. - Streifen.
Ausgezogene Linie: Bündelbegrenzung
Gestrichelte Linie: Teilbündel (symbolisch) zur Festlegung des Orts der Interferenzen.

Daß die Interferenzstreifen in einem größeren Gebiet um jene Bildorte noch gut ausgeprägt sind, kommt daher, daß sich in Wirklichkeit nicht Strahlen mit gewissen Phasenunterschieden an bestimmten Orten schneiden, sondern eine räumliche Überschneidung von Wellenflächen stattfindet. (s. Abb. 10). Voraussetzung dazu ist aber ausreichende Kohärenz und Monochromasie des verwendeten Lichts. Ersteres hängt von der Geometrie, vor allem von der Lichtquellengröße, Letzteres von der Linienbreite des verwendeten Lichts ab, allerdings nur bei höheren Interferenz - Ordnungen. An jedem der Polarisatoren wird nur die halbe Intensität durchgelassen, d. h. insgesamt gehen 75 % der zur Verfügung stehenden Intensität verloren.
Die optische Anordnung im Anschluß an das D. - I. dient der photographischen Aufnahme der während einer Entladung auftretenden Interferenzstreifenverschiebungen. Es ist (s. Abb. 4) Sp ein Spalt, am Bildort der Interferenzstreifen und senkrecht zu diesen; an das Bild der Lichtquelle wird ein Compurverschluß V gebracht mit variabler Blende B x). Der Spalt Sp wird über einen Drehspiegel

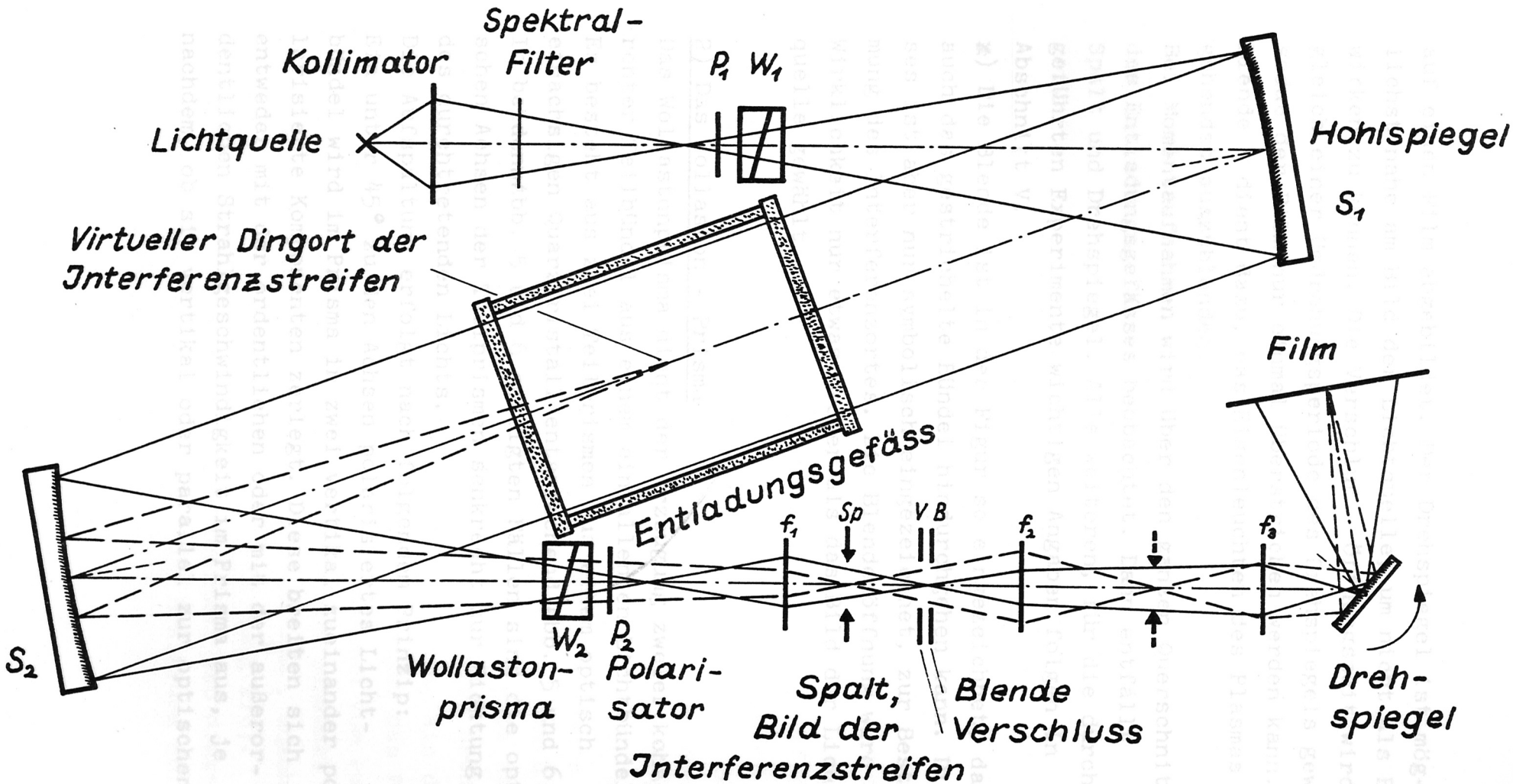


Abb. 4 Differentialinterferometer

auf einen Film abgebildet. Der Drehspiegel ist möglichst nahe am Bild der Lichtquelle, um nicht als Blende wirken zu können. Die Verschluß - Öffnungszeit wird gleich einer Umdrehungsperiode des Drehspiegels gewählt, sodaß der Film nur einmal überstrichen werden kann. Die Blende B dient dazu, das Eigenleuchten des Plasmas weitgehendst auszublenden.
Bei Momentaufnahmen wird über den ganzen Querschnitt des Entladungsgefässes beobachtet. Dann entfällt Spalt und Drehspiegel. Alle weiteren, für die durchgeführten Experimente wichtigen Angaben folgen in Abschnitt V.
x) Die Blende ist in der Figur so eingezeichnet, daß auch das gestrichelte Bündel hindurchgehen kann. Dieses ist aber nur symbolisch eingezeichnet, zur Bestimmung des Interferenzortes. Die Blendenöffnung wird in Wirklichkeit nur etwas größer als das Bild der Lichtquelle gewählt.

2) Das Wollaston - Prisma

Das Wollastonprisma dient der Erzeugung zweier kohärenter Teilbündel aus einem einfallenden Lichtbündel. Es besteht aus zwei Teilprismen aus einem optisch einachsigen Quarzkristall entsprechend Abb. 5 und 6. In beiden Abb. 5 und 6 gezeigten Fällen sind die optischen Achsen der Teilprismen senkrecht zur Richtung des durchtretenden Lichts.
Die Aufspaltung erfolgt nach folgendem Prinzip:
Ein unter 45° zu den Achsen polarisiertes Lichtbündel wird im Prisma in zwei vertikal zueinander polarisierte Komponenten zerlegt. Diese breiten sich entweder mit der ordentlichen oder mit der außerordentlichen Strahlgeschwindigkeit im Prisma aus, je nachdem, ob sie vertikal oder parallel zur optischen

Achse polarisiert sind.
Für Quarz ist die ordentliche Strahlgeschwindigkeit größer als die außerordentliche Strahlgeschwindigkeit. Bezeichnet man

U_o = Ordentliche Geschwindigkeit

U_e = Außerordentliche Geschwindigkeit

dann ist für Quarz

$$U_o > U_e \qquad U_o - U_e \ll U_o, U_e \quad (19) \quad (19\ a)$$

oder, wenn man mittels

$$n_o = \frac{c}{U_o} \quad (20)$$

$$n_e = \frac{c}{U_e} \quad (21)$$

die Brechungsindices n_o bzw. n_e einführt

$$n_e > n_o \qquad n_e - n_o \ll n_o, n_e \quad (22) \quad (22\ a)$$

In Abb. 8 sind n_o und n_e sowie $n_e - n_o$ als Funktion der Wellenlänge dargestellt.
In Abb. 5 ist ein Wollastonprisma dargestellt, mit den optischen Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die senkrecht zueinander sind. Die Trennfläche der Teilprismen A und B ist gegenüber der Stirn- bzw. Endfläche des Prismas um den Winkel α geneigt. Ein Strahl tritt senkrecht zur Stirnfläche des Prismas A in dieses ein und wird in die beiden Komponenten a und b zerlegt. Für die Komponente a ist das Prisma A das optisch dichtere, das Prisma B das optisch dünnere Medium. Für die Komponente b gilt das Umgekehrte. Im Punkt Q auf der Trennfläche wird deshalb die Komponente a stärker vom Lot weggebrochen, als die Komponente b. Die beiden Komponenten verlassen das Prisma B in verschiedene Richtungen. Sie scheinen vom Punkt P zu kommen. Sein Abstand von der Trennebene schwankt je nach dem Einfallswinkel zwischen $\frac{D}{20}$ und $\frac{D}{6}$, unabhängig von der Prismendicke D (maximale Öffnung 1:5).
Für den in Abb. 5 gewählten Einfallswinkel ist dieser Abstand durch $\frac{i}{2} = \frac{D}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ gegeben. Die Erklärung dafür findet sich in Abb. 12.

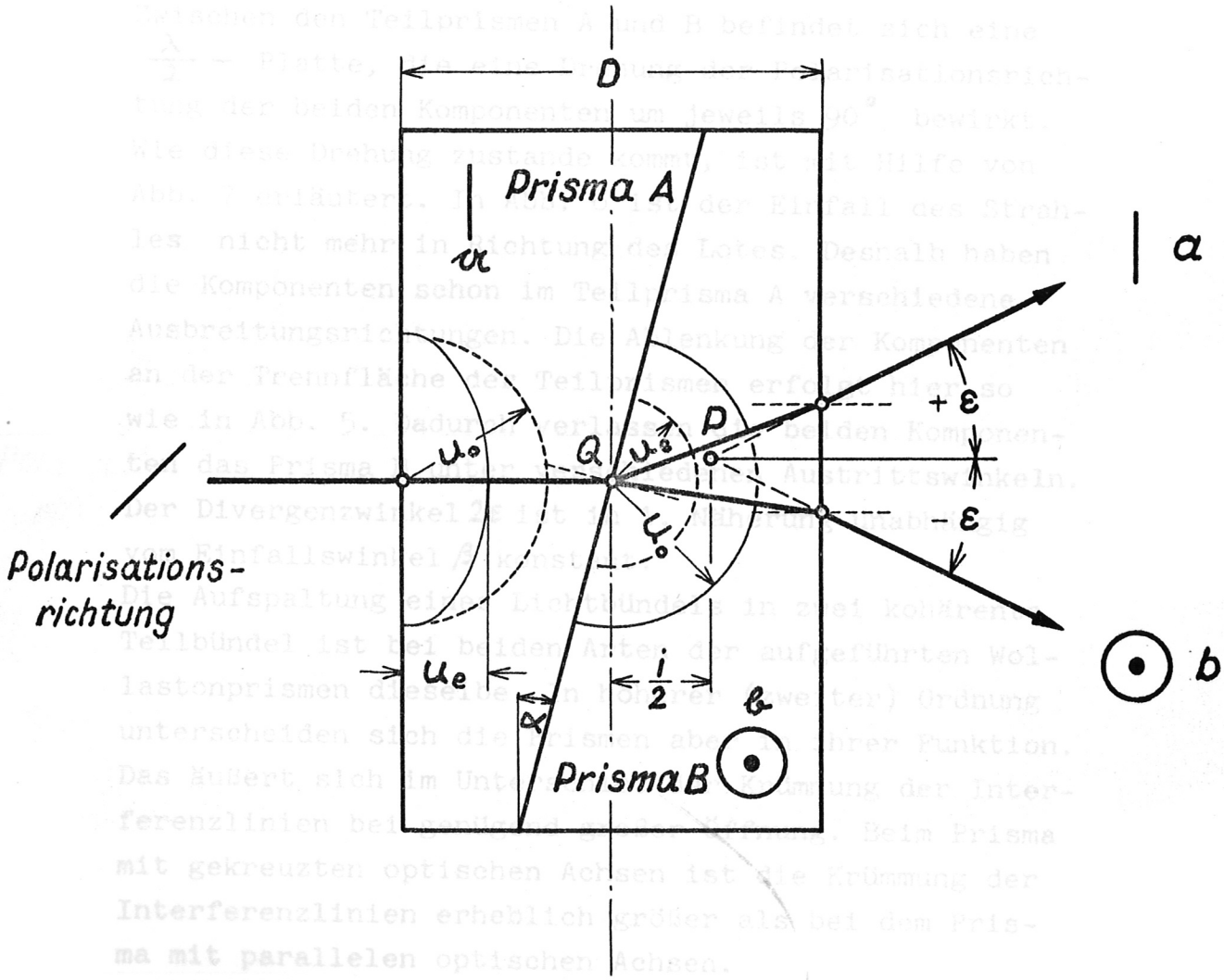


Abb. 5
Wollastonprisma mit gekreuzten optischen Achsen.
Senkrechter Einfall des Strahles.
$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind die Richtungen der optischen Achsen
a und b sind Polarisationsrichtungen
Die Polarisationsrichtung für den eintretenden Strahl ist für Betrachtung in Ausbreitungsrichtung gegeben.

In Abb. 6 ist ein Wollastonprisma dargestellt, dessen optische Achsen a und b parallel zueinander sind. Zwischen den Teilprismen A und B befindet sich eine $\frac{\lambda}{2}$ – Platte, die eine Drehung der Polarisationsrichtung der beiden Komponenten um jeweils 90° bewirkt. Wie diese Drehung zustande kommt, ist mit Hilfe von Abb. 7 erläutert. In Abb. 6 ist der Einfall des Strahles nicht mehr in Richtung des Lotes. Deshalb haben die Komponenten schon im Teilprisma A verschiedene Ausbreitungsrichtungen. Die Ablenkung der Komponenten an der Trennfläche der Teilprismen erfolgt hier so wie in Abb. 5. Dadurch verlassen die beiden Komponenten das Prisma B unter verschiedenen Austrittswinkeln. Der Divergenzwinkel 2ε ist in 1. Näherung unabhängig vom Einfallswinkel β konstant.

Die Aufspaltung eines Lichtbündels in zwei kohärente Teilbündel ist bei beiden Arten der aufgeführten Wollastonprismen dieselbe. In höherer (zweiter) Ordnung unterscheiden sich die Prismen aber in ihrer Funktion. Das äußert sich im Unterschied der Krümmung der Interferenzlinien bei genügend großer Öffnung. Beim Prisma mit gekreuzten optischen Achsen ist die Krümmung der Interferenzlinien erheblich größer als bei dem Prisma mit parallelen optischen Achsen.

Das kommt daher, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des außerordentlichen Strahles von deren Richtung zur optischen Achse des Kristalles abhängt. In den Teilprismen B (s. Abb. 5 und 6) unterscheidet sich die Richtung der Achse um 90°.

Bei der Betrachtung des Strahlenganges im Prisma ist zu beachten, daß Strahlrichtung und Wellennormale verschiedene Richtungen haben, wenn die Ausbreitung nicht gerade in Richtung der optischen Achse des Prismas oder senkrecht dazu erfolgt. Für den Strah-

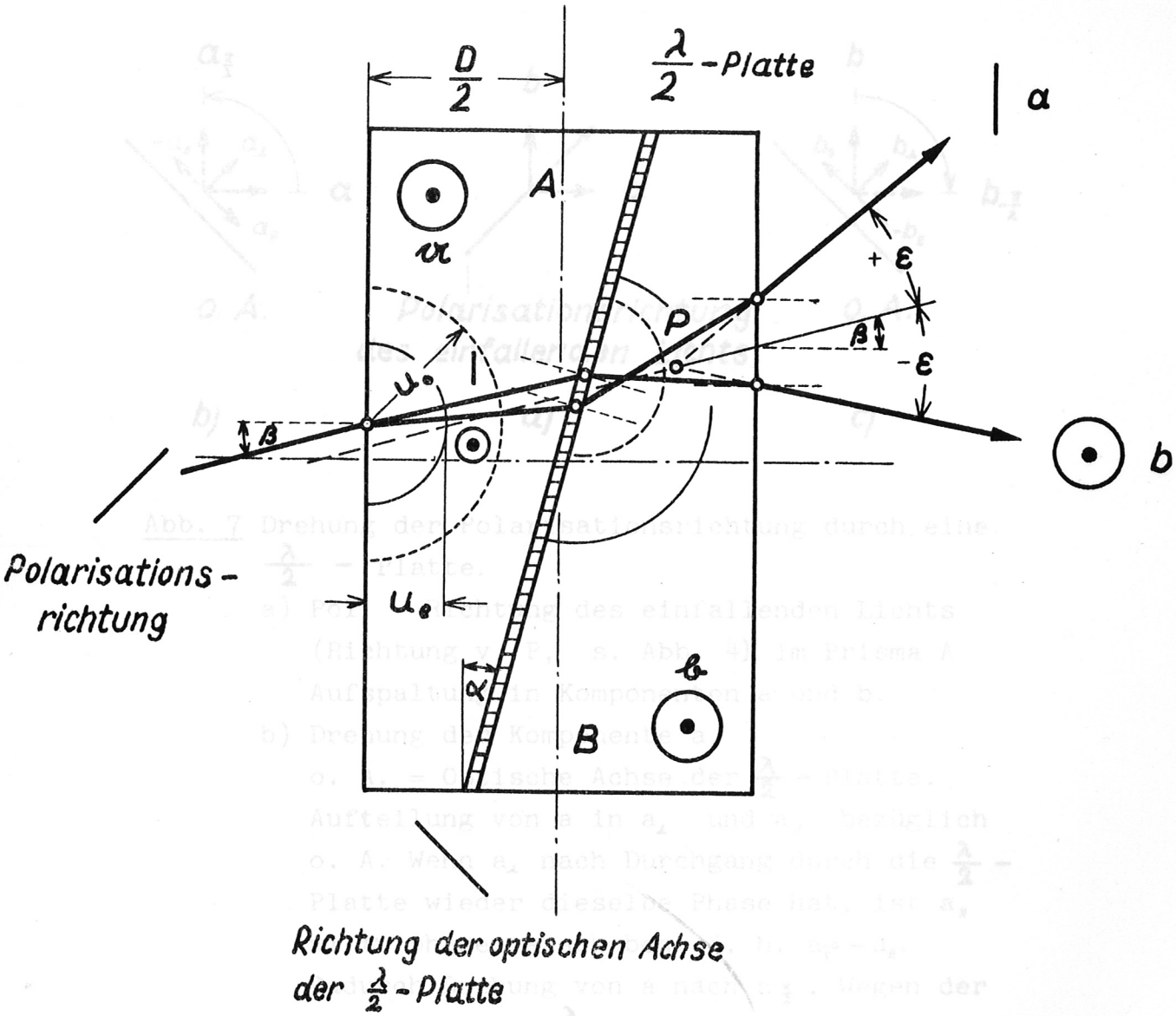


Abb. 6

Wollastonprisma mit parallelen optischen Achsen und $\frac{\lambda}{2}$ – Platte. Der Einfallswinkel zum Lot ist β. Sonstige Bezeichnungen wie in Abb. 5.
Die Polarisationsrichtung für den eintretenden Strahl und die Richtung der optischen Achse der $\frac{\lambda}{2}$ – Platte ist für Betrachtung in Ausbreitungsrichtung gegeben.

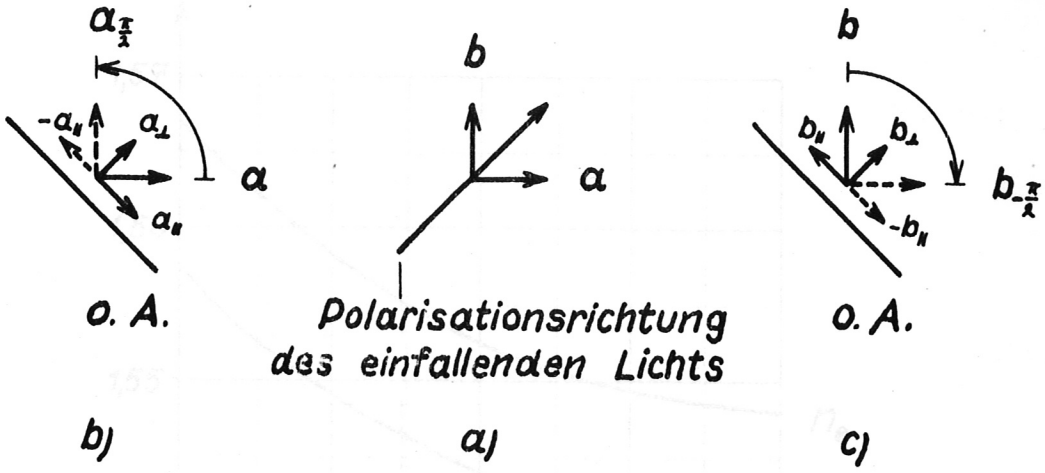


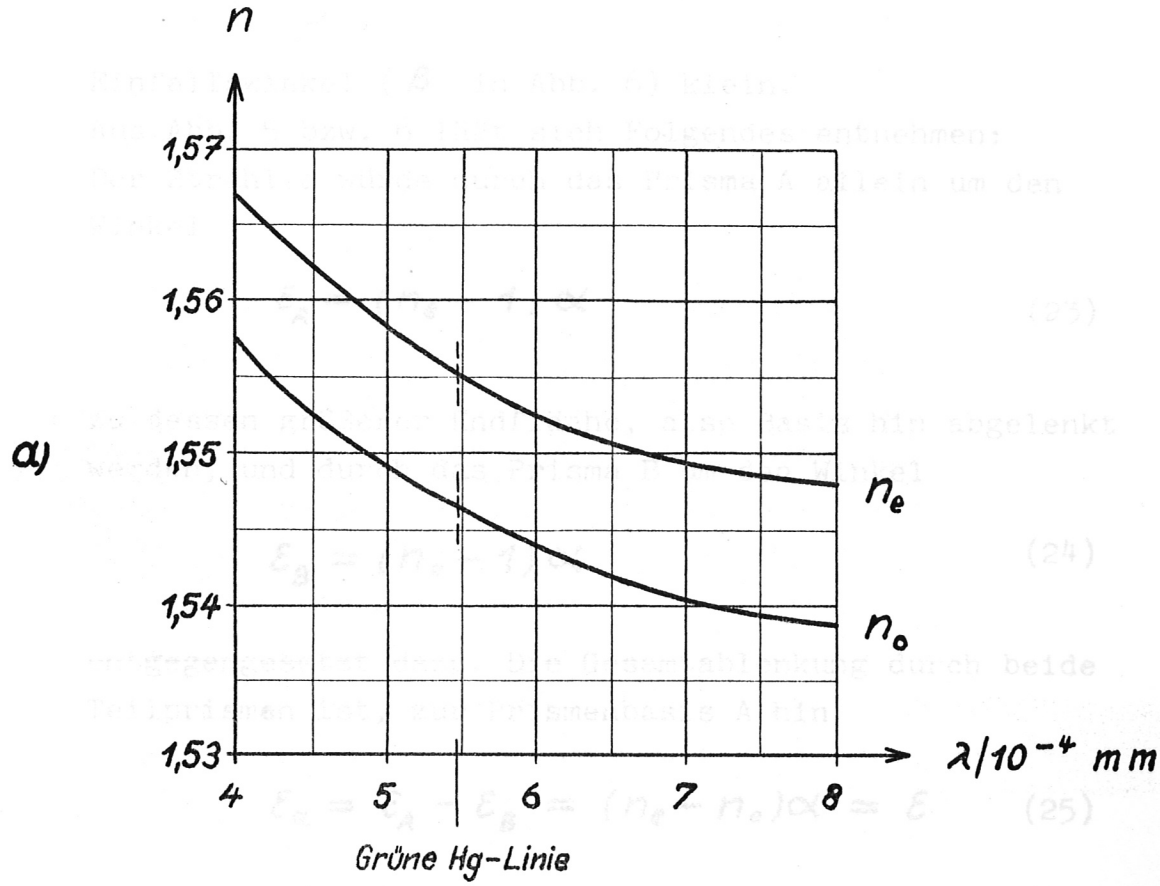
Abb. 7 Drehung der Polarisationsrichtung durch eine $\frac{\lambda}{2}$ – Platte.

a) Pol. - Richtung des einfallenden Lichts (Richtung v. P, s. Abb. 4). Im Prisma A Aufspaltung in Komponenten a und b.

b) Drehung der Komponente a.
o. A. = Optische Achse der $\frac{\lambda}{2}$ – Platte.
Aufteilung von a in $a_{\perp}$ und $a_{\parallel}$ bezüglich o. A. Wenn $a_{\perp}$ nach Durchgang durch die $\frac{\lambda}{2}$ – Platte wieder dieselbe Phase hat, ist $a_{\parallel}$ um π phasenverschoben, d. h. $a_{\parallel} \rightarrow -a_{\parallel}$.
Dadurch Drehung von a nach $a_{\frac{\pi}{2}}$. Wegen der Dispersion der $\frac{\lambda}{2}$ – Platte gilt die Betrachtung nur für eine Wellenlänge.

c) Betrachtung wie in b), für Komponente b.

lengang muß die Strahlrichtung herangezogen werden, weil in diese der Energietransport stattfindet. Das einfache Brechungsgesetz (Snellius) gilt aber nur für die Wellennormalen. Wegen (22a) ist aber der Unterschied zwischen Strahl- und Normalenrichtung vernachlässigbar, d. h. quasiisotrope Behandlung für die 1. Näherung zulässig. Außerdem ist in der Regel der



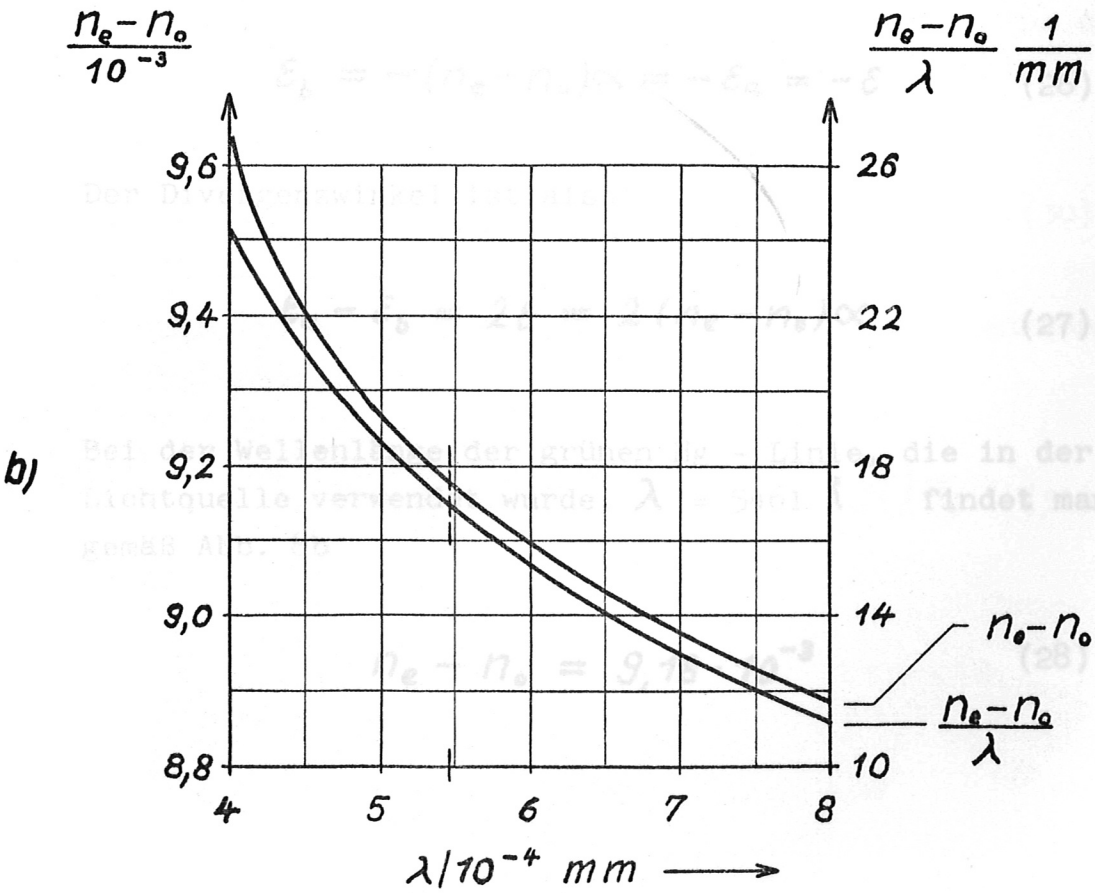


Abb. 8 Dispersionskurven für Quarz

Einfallswinkel (β in Abb. 6) klein.
Aus Abb. 5 bzw. 6 läßt sich Folgendes entnehmen:
Der Strahl a würde durch das Prisma A allein um den Winkel

$$\varepsilon_A = (n_e - 1)\alpha \tag{23}$$

zu dessen größerer Endfläche, also Basis hin abgelenkt werden, und durch das Prisma B um den Winkel

$$\varepsilon_B = (n_o - 1)\alpha \tag{24}$$

entgegengesetzt dazu. Die Gesamtablenkung durch beide Teilprismen ist, zur Prismenbasis A hin

$$\varepsilon_a = \varepsilon_A - \varepsilon_B = (n_e - n_o)\alpha = \varepsilon \tag{25}$$

Bei Vertauschung der Indices o und e ergibt sich die Ablenkung des Strahles b

$$\varepsilon_b = -(n_e - n_o)\alpha = -\varepsilon_a = -\varepsilon \tag{26}$$

Der Divergenzwinkel ist also

$$\varepsilon_a - \varepsilon_b = 2\varepsilon = 2(n_e - n_o)\alpha \tag{27}$$

Bei der Wellenlänge der grünen Hg - Linie, die in der Lichtquelle verwendet wurde, λ = 5461 Å findet man gemäß Abb. 8b

$$n_e - n_o = 9{,}18 \cdot 10^{-3} \tag{28}$$

Für den Winkel $\alpha = 8^\circ$, den die verwendeten Prismen haben, ergibt sich

$$\varepsilon = 1{,}28 \cdot 10^{-3} \quad \text{Bogen} \tag{29}$$

Die von den Teilstrahlen a und b im Wollastonprisma zurückgelegten geometrischen Wege können praktisch als gleich betrachtet werden, wegen der kleinen Winkel zwischen den Teilstrahlen. Wegen der kleinen Einfallswinkel genügt es, in 1. Näherung als geometrischen Weg durch das ganze Prisma dessen Dicke (D) zu nehmen.
Mit diesen Voraussetzungen läßt sich Abb. 9 zugrundelegen. Für einen Strahl in der Mittelebene CE des Wollastonprismas sind die geometrischen Wege in den Teilprismen gleich groß, zwischen a und b also der Gangunterschied gleich Null. Es sei, etwas verallgemeinert, ein Strahlenpaar a und b betrachtet, das das Prisma in den Abständen h_a bzw. h_b durchsetzt. Für den optischen Weg s_a des (nach oben abgelenkten) Teilstrahles a gilt

$$s_a = \left(\frac{D}{2} + h_a\alpha\right)n_e + \left(\frac{D}{2} - h_a\alpha\right)n_o \tag{30}$$

für den optischen Weg s_b des (nach unten abgelenkten) Teilstrahles b

$$s_b = \left(\frac{D}{2} + h_b\alpha\right)n_o + \left(\frac{D}{2} - h_b\alpha\right)n_e \tag{31}$$

Die Differenz ist

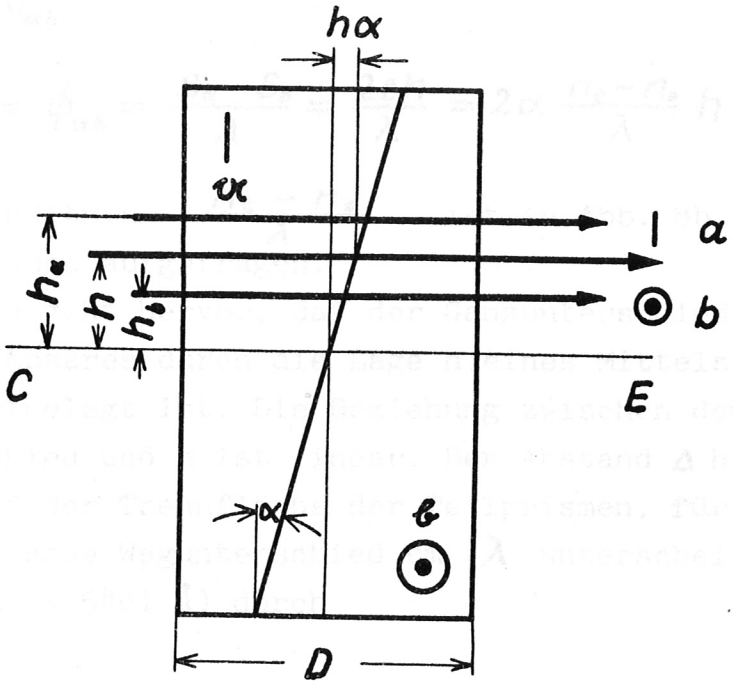


Abb. 9 Zur Ermittlung des Gangunterschiedes der Strahlen a und b in Abhängigkeit vom Abstand h von der Mittelebene CE.

$$S_a - S_b = \alpha(n_e - n_o)(h_a + h_b) = 2\alpha(n_e - n_o)h \qquad (32)$$

oder nach (27)

$$S_a - S_b = 2\varepsilon h \qquad (33)$$

Es ist der auf die Wellenlänge bezogene Gangunter-

schied ϕ_{ab}

$$\frac{\varphi_a - \varphi_b}{2\pi} = \phi_{ab} = \frac{S_a - S_b}{\lambda} = \frac{2\varepsilon h}{\lambda} = 2\alpha \frac{n_e - n_o}{\lambda} h \qquad (34)$$

Das Verhältnis $\frac{n_e - n_o}{\lambda}$ ist in Abb. 8b über der Wellenlänge aufgetragen.
Aus (32) geht hervor, daß der Gangunterschied eines Strahlenpaares durch die Lage h seines Mittelstrahles festgelegt ist. Die Beziehung zwischen dem Gangunterschied und h ist linear. Der Abstand Δ h zweier Orte auf der Trennfläche der Teilprismen, für die sich der optische Wegunterschied um λ unterscheidet, ist (für λ = 5461 Å) durch

$$\Delta h = \frac{\lambda}{2\varepsilon} = \frac{5{,}461 \cdot 10^{-4}}{2{,}56 \cdot 10^{-3}} = 0{,}213 \text{ mm} \qquad (35)$$

gegeben. S. auch Abb. 10.

3) Der Strahlengang.

Bei der Betrachtung des Strahlenganges der Interferometeranordnung geht es darum, aus den vorgegebenen Bedingungen, wie Apparatkonstanten, Geometrie, Wellenlänge usw. die Lage der Interferenzen im Raum zu ermitteln. Diese Aufgabe zerfällt in zwei Teile, die Bestimmung des Ortes der Interferenzen, in der Regel eine Ebene, und in die Ermittlung des Streifenabstandes. Aus dem Strahlengang können dann weitere Folgerungen hinsichtlich Kohärenz und Meßempfindlichkeit bei Anwendung auf Plasmen gezogen werden. Zur Darstellung wird die geometrische Optik herangezogen. Im Bereich der in Frage kommenden Öffnungen (um f : 10) ist dies erlaubt. Beugungseffekte werden vernachlässigt.

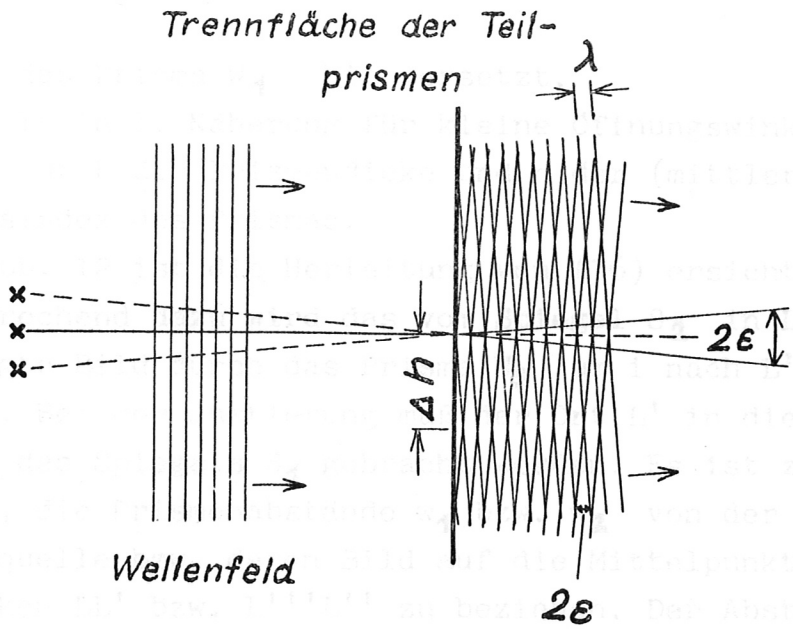


Abb. 10 Aufteilung eines Wellenfeldes in zwei kohärente Wellenfelder.

λ = Wellenlänge

2ε = Divergenzwinkel, Neigung der Wellenflächen zueinander

Δh = Abstand der Orte, für die sich der optische Wegunterschied um λ unterscheidet.

a) Gegenstandsort der Interferenzen

Als Grundlage der Betrachtung diene Abb. 11 mit den darin enthaltenen Bezeichnungen. Für die Justierung ist zu beachten, daß im Bereich zwischen dem Wollastonprisma W_1 und dem Spiegel S_1 das Licht von der scheinbaren Lichtquelle L´ kommt. Gegen die wirkliche Lichtquelle L ist L´um

$$i = D\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{36}$$

gegen das Prisma W_1 hin versetzt.
Das gilt in 1. Näherung für kleine Öffnungswinkel.
Dabei ist D die Prismendicke und n der (mittlere) Brechungsindex des Prismas.
Aus Abb. 12 ist die Herleitung von (36) ersichtlich.
Entsprechend dazu wird das vom Spiegel S_2 in L''' erzeugte Bild durch das Prisma W_2 um i nach L'' versetzt. Bei der Justierung muß der Ort L' in die Brennebene des Spiegels S_1 gebracht werden. Es ist zweckmäßig, die Prismenabstände w_1 bzw. w_2 von der Lichtquelle bzw. deren Bild auf die Mittelpunkte der Strecken LL' bzw. L'''L'' zu beziehen. Der Abstand h, in dem die gemeinsame Fläche der Teilprismen passiert wird, steht dann in einfacher Beziehung zu w_1 bzw. w_2. Dann nämlich gilt $h_1 = \beta w_1$ (bzw. $h_2 = \beta w_2$). S. Abb. 9 und zur näheren Erklärung Abb. 12.

Ein von L ausgehender Strahl wird in W_1 unter dem Winkel 2ε aufgespalten. Der scheinbare Divergenzpunkt liegt im Abstand $\frac{i}{2}$ von der Prismenmitte (Punkt P in Abb. 5 und 6. S. vor allem Abb. 12), d. h. im Abstand w_1 von der Brennebene von S_1. Nach der Reflexion an S_1 scheinen die Teilstrahlen vom Punkt A im Abstand p von S_1 zu kommen. Die Lage von A ist durch

$$\frac{1}{f - w_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \tag{37}$$

bestimmt. Bei A tritt der Winkel 2ε auf. Er ergibt sich aus dem gleichen Abstand der Teilstrahlenpaare auf S_1.

$$2\varepsilon(f - w_1) = 2\varepsilon' p \tag{38}$$

Der Winkel $2\varepsilon'$ tritt im Meßraum, zwischen S_1 und S_2, auf. Von S_2 wird A in den Punkt B im Abstand t von L''' virtuell abgebildet.

$$\frac{1}{a+p} + \frac{1}{f+t} = \frac{1}{f} \tag{39}$$

Der dort auftretende Winkel ist mit $2\varepsilon''$ bezeichnet. Er ergibt sich aus dem gleichen Abstand der Teilstrahlenpaare auf S_2.

$$2\varepsilon'(a+p) = 2\varepsilon''(f+t) \tag{40}$$

Das Bild B von A ist deshalb virtuell, da in W_2 jeder Teilstrahl eine wiederholte Ablenkung um den Winkel ε erfährt. Sie schneiden sich in dem, bei der gewählten Anordnung reellen, Bildpunkt C im Abstand q von W_2. Wegen der Ablenkung in W_2 gilt für q

$$2\varepsilon''(t+w_2) = 2(\varepsilon''-\varepsilon)q \tag{41}$$

Der Bildpunkt C gehört zu dem Gegenstandsort G im Abstand e von S_2, nach S_1 hin gerechnet. Der Abstand e bestimmt sich aus

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{q+f-w_2} = \frac{1}{f} \tag{42}$$

In den letzten beiden Beziehungen wurde die Dicke von W_2 nicht berücksichtigt, weil sie in die Bestimmung von e ohnehin nicht eingehen würde. Bei endlicher Prismendicke ist C um i nach rechts verschoben.

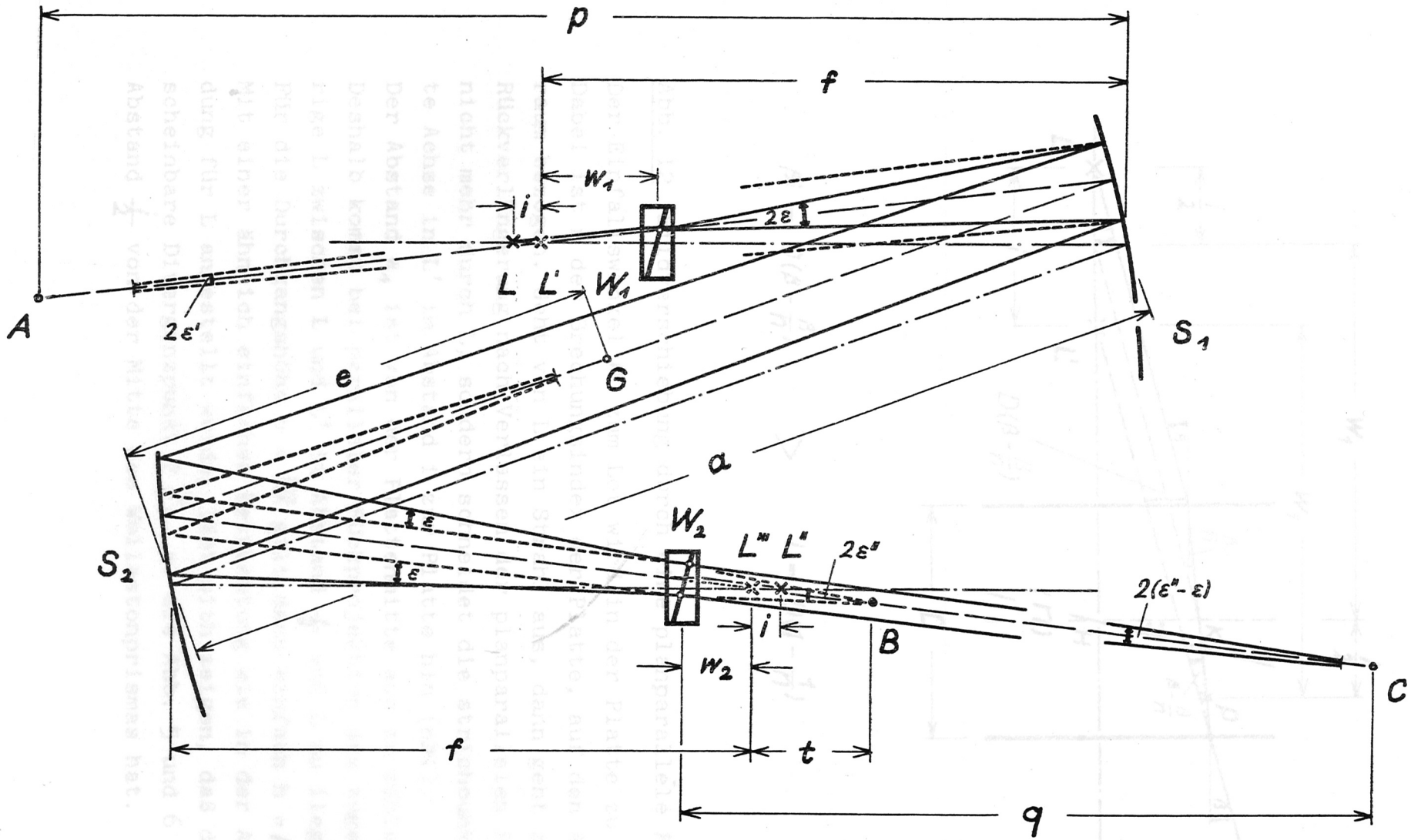
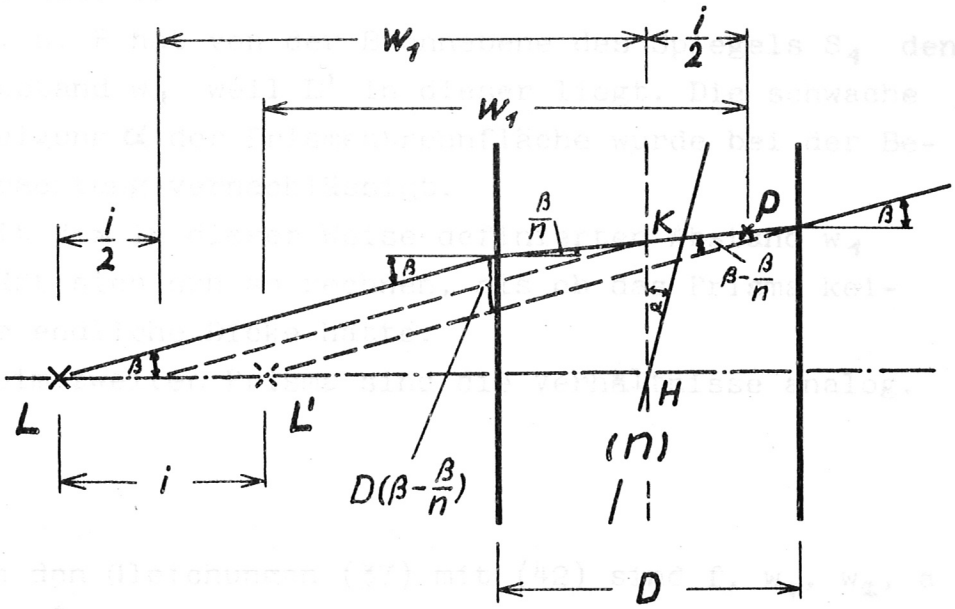


Abb. 11 Strahlengang 1 zur Bestimmung des Gegenstandsortes der Interferenzstreifen.



$$\beta i = D(\beta - \frac{\beta}{n}) \quad > \quad i = D(1 - \frac{1}{n})$$

Abb. 12 Bildverschiebung durch eine planparallele Platte.

Der Einfallswinkel β zum Lot wird in der Platte zu $\frac{\beta}{n}$. Dabei ist n der Brechungsindex der Platte, auf den Außenraum bezogen. Geht von L ein Strahl aus, dann geht seine Rückverlängerung nach Verlassen der planparallelen Platte nicht mehr durch L, sondern schneidet die strichpunktierte Achse in L' im Abstand i zur Platte hin (n>1).
Der Abstand w_1 ist von der Plattenmitte aus zu zählen. Deshalb kommt bei paralleler Rückprojektion das zugehörige L zwischen L und L' im Abstand $\frac{i}{2}$ von L zu liegen. Für die Durchgangshöhe h = $\overline{HK}$ gilt dann einfach h = βw_1. Mit einer ähnlich einfachen Betrachtung wie in der Abbildung für L angestellt wurde, läßt sich zeigen, daß der scheinbare Divergenzpunkt P (s. a. die Abb. 5 und 6) den Abstand $\frac{i}{2}$ von der Mitte des Wollastonprismas hat.

zu Abb. 12

D. h. P hat von der Brennebene des Spiegels S_1 den Abstand w_1 weil L' in dieser liegt. Die schwache Neigung α der Prismentrennfläche wurde bei der Betrachtung vernachlässigt.

Mit dem in dieser Weise definierten Abstand w_1 läßt sich nun so rechnen, als ob das Prisma keine endliche Dicke hätte.

Beim zweiten Prisma sind die Verhältnisse analog.

In den Gleichungen (37) mit (42) sind f, w_1, w_2, a und ε als gegeben zu betrachten.

f = Spiegelbrennweite

w_1, w_2 = Prismenabstände von den Brennebenen der Spiegel S_1, S_2.

a = Abstand der Spiegel S_1 und S_2.

ε = Divergenzwinkel

Die Größen p, t, q, e, ε', und ε'' sind unbekannt. Diese 6 Größen lassen sich aus den 6 Gl. (37) mit (42) bestimmen.

Von den unbekannten Größen sind zwei von Interesse, nämlich der Divergenzwinkel $2\varepsilon'$ im Meßraum zwischen S_1 und S_2 und der virtuelle Ort der Interferenzen im Abstand e von S_2. Diese Größen ergeben sich aus den Gl. (37) mit (42) zu

$$\varepsilon' = \frac{w_1}{f}\,\varepsilon \tag{43}$$

und

$$e = \frac{a + \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) f}{1 + \frac{w_2}{w_1}} \tag{44}$$

Für symmetrische Anordnung $w_1 = w_2$ wird

$$e = \frac{a}{2} \tag{45}$$

d. h. der Ursprung der Interferenzen liegt in der Mitte zwischen den Spiegeln S_1 und S_2.
Die Stellung der Prismen zueinander ist so zu wählen, daß die Teilstrahlen in den Prismen jedesmal im selben Sinn abgelenkt werden.
Bei den Prismen mit gekreuzten Achsen (s. Abb. 5) bleibt die Polarisationsrichtung der Teilstrahlen erhalten. Deshalb sind die Prismen auf der Systemachse gleichsinnig angeordnet, die den Teilprismen gemeinsamen Flächen sind parallel zueinander.
Bei Prismen mit parallelen Achsen (s. Abb. 6) wird durch die $\frac{\lambda}{2}$-Platte die Polarisationsrichtung der beiden Teilstrahlen um je 90° gedreht. Die Reihenfolge von dichterem und dünnerem Medium im zweiten Prisma ist also umgekehrt zum ersten. D. h. die $\frac{\lambda}{2}$ – Prismen müssen gegensinnig angeordnet werden. Dies ist in Abb. 11a dargestellt.

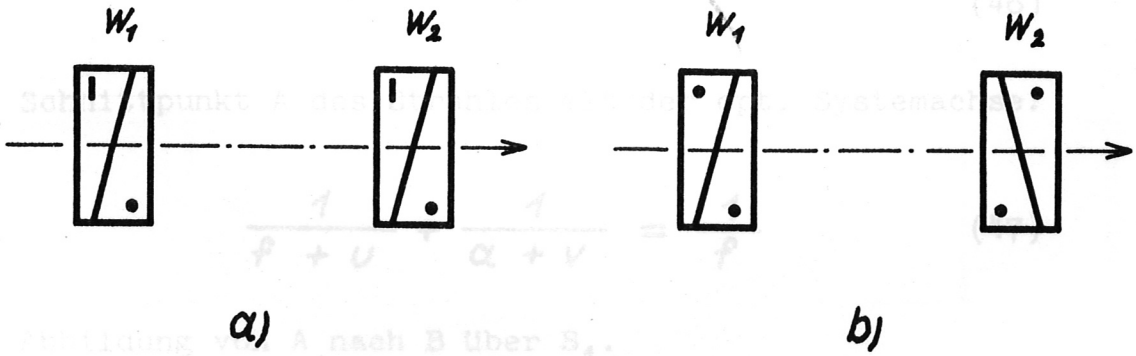


Abb. 11a Prismenfolge
a) Bei Prismen mit gekreuzten Achsen
b) Bei Prismen mit parallelen Achsen

b) Gangunterschied am Gegenstandsort. Streifenabstand.

Für die Ermittlung des Gangunterschiedes genügt es nach (32), den Verlauf des Mittelstrahles der Teilstrahlen zu kennen. Als Grundlage der Betrachtung diene Abb. 13 mit den darin enthaltenen Bezeichnungen. Die Lichtquelle habe nun eine endliche Ausdehnung l, um deren Einfluß auf die Phasenbeziehungen zu ersehen. Es müssen nun die Durchgangsabstände h_1 und h_2 durch die Prismen W_1 bzw. W_2 bestimmt und zum Abstand y des Gegenstandsortes von der optischen Achse des Systems in Beziehung gesetzt werden.
Als gegeben sind zu betrachten: f, w_1, w_2, a, damit auch e, ξ und β .
Dabei ist ξ = Ort auf der Lichtquelle
β = Einfallswinkel zum Prismenlot; Prismenlot parallel zur optischen Systemachse.
Die Gleichungen für die 8 Unbekannten u, v, g, h_1, h_2, y, β' und β'' ergeben sich in ähnlicher Weise wie in a) zu

$$\beta u = \xi \tag{46}$$

Schnittpunkt A des Strahles mit der opt. Systemachse.

$$\frac{1}{f+u} + \frac{1}{a+v} = \frac{1}{f} \tag{47}$$

Abbildung von A nach B über S_1.

$$\frac{1}{f-g} - \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \tag{48}$$

Abbildung von B nach C über S_2.

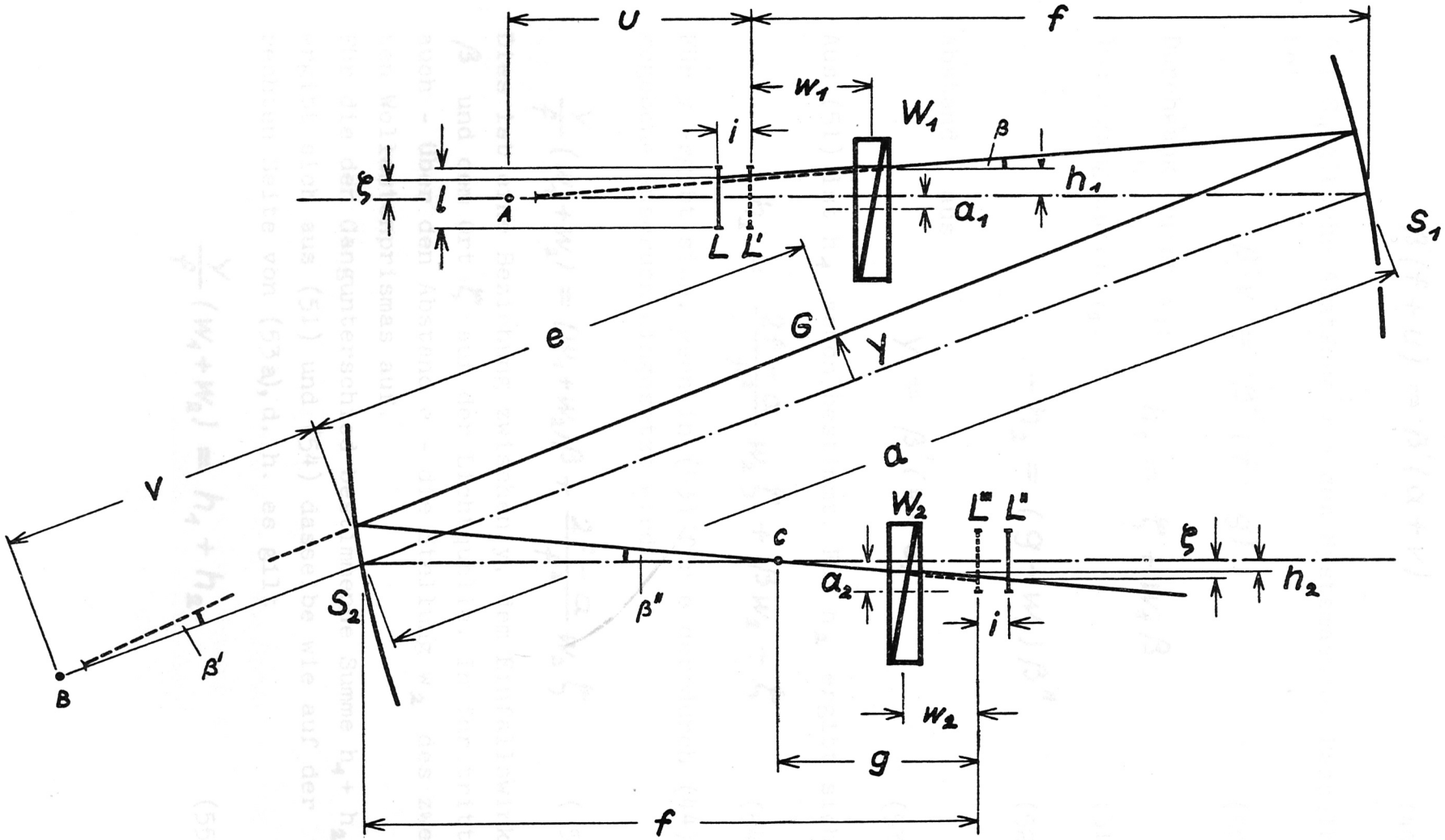


Abb. 13 Strahlengang 2 zur Bestimmung des Gangunterschiedes und damit des Abstandes der Interferenzstreifen.

$$\beta(f+u) = \beta'(a+v) \tag{49}$$

Auf S_1 gleiche Abstände von der Systemachse. Dasselbe bei

$$\beta' v = \beta''(f-g) \tag{50}$$

Durchgang durch W_1: $\quad h_1 = \xi + w_1\beta$

Durchgang durch W_2: (51)

$$-h_2 = (g-w_2)\beta'' \tag{52}$$

Abstand y aus

$$y = \beta'(v+e) \tag{53}$$

Aus (51) ist h_1 schon bestimmt. Für h_2 ergibt sich

$$h_2 = \frac{2f-a}{f^2} w_2 \xi + \beta w_2 - \xi \tag{54}$$

Für y ergibt sich, wenn in (53) für e der durch (44) gegebene Ausdruck eingesetzt wird

$$\frac{y}{f}(w_1+w_2) = (w_1+w_2)\beta + \frac{2f-a}{f^2} w_2 \xi \tag{53a}$$

Dies ist eine Beziehung zwischen y, dem Einfallswinkel β und dem Ort ξ auf der Lichtquelle. In ihr tritt auch - über den Abstand e - die Stellung w_2 des zweiten Wollastonprismas auf.

Für die den Gangunterschied bestimmende Summe $h_1 + h_2$ ergibt sich aus (51) und (54) dasselbe wie auf der rechten Seite von (53a), d. h. es gilt

$$\frac{y}{f}(w_1+w_2) = h_1 + h_2 \tag{55}$$

Der

Gangunterschied ist also

$$\phi = \frac{2\varepsilon}{\lambda}(h_1+h_2) = \frac{2\varepsilon}{\lambda}(w_1+w_2)\frac{y}{f} \cdot \qquad (56)$$

Sind die Wollastonprismen um a_1 bzw. a_2 seitlich zur optischen Achse des Systems versetzt, dann addiert sich zu (56) noch ein Gangunterschied

$$\phi_{a_1+a_2} = \frac{2\varepsilon}{\lambda}(a_1+a_2) \qquad (57)$$

Der gesamte Gangunterschied ist dann:

$$\phi = \frac{2\varepsilon}{\lambda}\left(a_1+a_2+(w_1+w_2)\frac{y}{f}\right) \qquad (58)$$

Der Gangunterschied ist eine lineare Funktion von y. In der Gegenstandsebene sind (virtuelle) parallele, äquidistante Interferenzstreifen. Ihr Bild kann am Ausgang des Interferometers erzeugt werden.
Bemerkenswert ist die Richtungsumkehr des "Phasengefälles" $\frac{d\phi}{dy}$ = const. wenn w_1, $w_2 \to -w_1$, $-w_2$. Dann wird $\frac{d\phi}{dy} \longrightarrow -\frac{d\phi}{dy}$ aber der Ort e der Interferenzen bleibt nach (44) erhalten. Die Streifenverschiebung beim Einbringen eines Meßobjektes kehrt dann ihre Richtung um (s. Abb. 17).

Die Größe der Lichtquelle geht nicht in die Phasenbeziehung (58) ein. Die Kohärenz ist in dieser Näherung also von selbst gewährleistet.
Der Streifenabstand Δy in der Gegenstandsebene ergibt sich nach (58) aus der Bedingung $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 1$ zu

$$\Delta y = \frac{\lambda f}{2\varepsilon(w_1+w_2)} \qquad (59)$$

Für kleine $w_1 + w_2$ hängt Δy sehr empfindlich von Lageänderungen der Prismen in Längsrichtung ab. Die Streifen sind dann gegen Längsschwingungen empfindlich. Es tritt dann auch starke Empfindlichkeit gegen Quer-

schwingungen der Prismen auf. Aus $\emptyset$ = const. in (58) ergibt sich der Zusammenhang zwischen einer seitlichen Verschiebung $\delta(a_1 + a_2)$ der Prismen und einer Verschiebung δy in der Gegenstandsebene der Interferenzen.

$$\delta y = - \frac{f}{w_1 + w_2} \delta (a_1 + a_2) \qquad (60)$$

Die Verschiebung δy wird sehr groß, wenn $w_1 + w_2$ sehr klein wird.

Da die Streifen einerseits durch ihren Ort, andererseits durch ihren Abstand charakterisiert sind, sind zwei Parameter nötig, um Streifen in gewünschter Art herzustellen. Diese Parameter sind w_1 und w_2.

Der Ort e und der Abstand Δy der Streifen seien vorgegeben. Dann bestimmt sich w_1 und w_2 aus (44) und (59) zu

$$w_1 = \frac{e-f}{a-2f} \cdot \frac{\lambda f}{2\varepsilon \Delta y} \qquad (61)$$

$$w_2 = \frac{a-(e+f)}{a-2f} \cdot \frac{\lambda f}{2\varepsilon \Delta y} \qquad (62)$$

4) Kohärenz.

Bei der Behandlung des Strahlenganges ergab sich, daß die Größe der Lichtquelle ohne Einfluß auf den Gangunterschied ist. Diese Betrachtung wurde so geführt, als ob das Licht die Prismen an allen Orten parallel zur Achse des optischen Systems durchsetzt. Dann ist der geometrische Weg im Prisma gleich der Prismendicke D.
In Wirklichkeit werden die Prismen, wegen der endlichen Öffnungen, schräg vom Licht durchsetzt. Der Einfallswinkel β ist in der Regel klein und der Faktor der geometrischen Wegverlängerung kann durch

$$\frac{1}{\cos\frac{\beta}{n}} \approx \left(1+\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1+\frac{\beta^2}{2n^2}$$

gegeben werden, wenn der Einfallswinkel mit β und der mittlere Brechungsindex mit n bezeichnet wird.
Für die Kohärenz an einem Punkt der Interferenzebene ist aber nicht der Einfallswinkel maßgebend, sondern der Winkel 2γ, über den sich der Einfallswinkel für die Strahlen ändert, die durch den Punkt gehen. Dieser Winkel ist in Abb. 14 eingetragen. Die Zunahme des optischen Weges durch schrägen Einfall, bezogen auf die Wellenlänge ist nach Gl. (34) und der Beziehung für die geometrische Wegverlängerung:

$$\phi_{zus} = \frac{\varepsilon h}{\lambda n^2}\beta^2 \qquad (63)$$

und die Änderung über einen Öffnungswinkel 2γ

$$\phi_{zus} = \frac{\varepsilon h}{\lambda n^2}(\beta_2^2-\beta_1^2) = \frac{\varepsilon h}{\lambda n^2}(\beta_1+\beta_2)\,2\gamma$$
$$< \frac{2\varepsilon h}{\lambda n^2}\beta_{max}\cdot 2\gamma_{max} = \phi(h)\frac{2\gamma_{max}\beta_{max}}{n^2} \qquad (64)$$

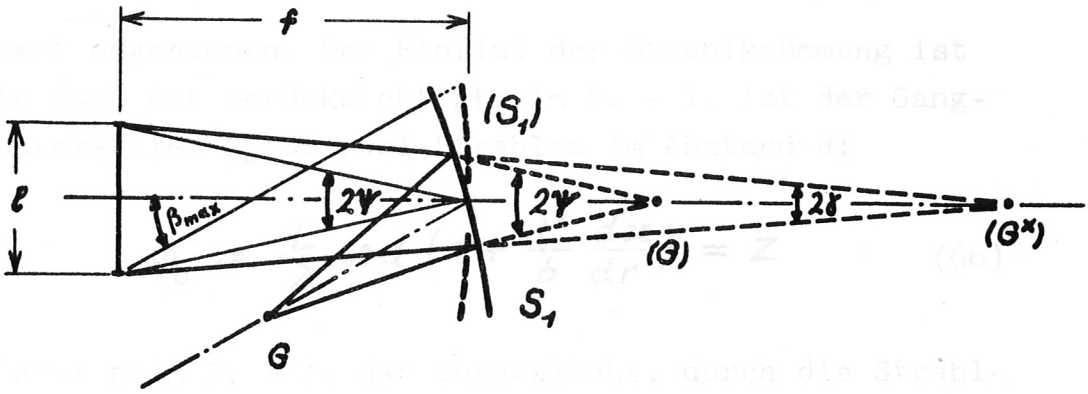


Abb. 14 Büschelöffnung $2\psi = \frac{\ell}{f}$, Winkel 2γ, unter dem die Lichtquelle von G^x aus erscheint. G^x ist das Bild von G, in dem Raum, wo Lichtquelle und Prisma sich befinden.
Der maximale Einfallswinkel ist β_{max}.

Größenordnungsmäßig ist β_{max} durch die größte nutzbare Öffnung gegeben. Der Winkel 2γ erreicht maximal 2ψ Bei den Daten des gebauten D. - I's wird

$$\frac{2\gamma_{max}\beta_{max}}{n^2} \approx \gamma_{max}\beta_{max} = 0{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}075 = 6\cdot 10^{-5},$$

woraus sich praktisch vollkommene Kohärenz folgern läßt. Die Lichtquelle ist also in ihrer Größe nicht beschränkt.

5) Anwendungsbereich des Differentialinterferometers.

Beim Mach - Zehnder - Interferometer ist der vom Plasma erzeugte Gangunterschied Ø bzw. die Streifenverschiebung z durch

$$\phi = (n-1)\frac{L}{\lambda} + \frac{1}{12}\frac{\varkappa^2 L^3}{\lambda} = z \qquad (65)$$

gegeben [2]. Dabei ist $\varkappa = \frac{dn}{dr} = -\delta\frac{dN_e}{dr}$ (s. Gl 10).
Für n ist über die Beobachtungsrichtung ein Mittel-

wert angenommen. Der Einfluß der Strahlkrümmung ist in (65) mit berücksichtigt. Im D. - I. ist der Gangunterschied ϕ_D für zwei Strahlen im Abstand d:

$$\phi_0 = \frac{L}{\lambda} \varkappa d \left(1 + \frac{L^2}{6} \frac{d\varkappa}{dr}\right) = z \qquad (66)$$

Damit beim D. - I. der zusätzliche, durch die Strahlkrümmung erzeugte Gangunterschied innerhalb des Stahlabstandes d unter der Meßgenauigkeit der Streifenverschiebung liegt, muß die aus (66) zu entnehmende Bedingung

$$\frac{1}{6} \frac{L^3}{\lambda} \varkappa \frac{d\varkappa}{dr} d \leq \frac{1}{10} \qquad (67)$$

erfüllt sein, denn 1/10 Streifenverschiebung kann gerade noch festgestellt werden.
Betrachtet man neben der Wellenlänge λ und dem Abstand d das Profil der mittleren Elektronendichte längs des Beobachtungswegen L als gegeben, dann ist durch (67) eine obere Grenze für L angegeben. Bis zu dieser Länge ist das D. - I. noch in einfacher Weise anwendbar.
Für ein gegebenes Dichteprofil ist die maximal zulässige Länge L_{max} durch

$$\frac{1}{6} \frac{L_{max}^3}{\lambda} \left(\varkappa \frac{d\varkappa}{dr}\right)_{max} d = \frac{1}{10} \qquad (68)$$

gegeben. Je kleiner der Strahlabstand d und je größer die Wellenlänge λ ist, um so größer wird die zulässige Länge.
Als Beispiel werde ein sinusförmiges Profil betrachtet (s. Abb. 15). Es tritt qualitativ in der selben Art in

starken Theta-Pinch - Entladungen auf. Es sei $\lambda = 5461$ Å, d = 2,56 mm. Das Profil hat die Gleichung

$$N_e = \frac{N_{eo}}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{\rho}r\right) \quad (69)$$

mit $N_{eo} = 10^{17}\ cm^{-3}$.
Die Größe ρ ist die Halbwertsbreite des Profils. Aus (69) ergibt sich

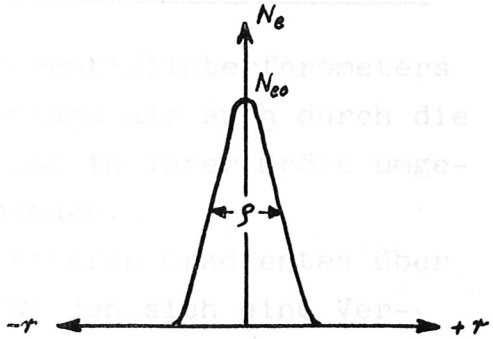


Abb. 15 Sinusförmiges Elektronendichte - Profil.

$$\left(\varkappa\frac{d\varkappa}{dr}\right)_{max} = 1{,}33^2\cdot 10^{-10}\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^3 \quad (70)$$

und mit (68)

$$\frac{L_{max}}{\rho} = 125 \quad (71)$$

Wenn z. B. ρ = 1 cm, dann ist L_{max} = 1,25m. Für den maximal auftretenden Gradienten $\left(\frac{dN_e}{dr}\right)_{max}$ gilt

$$\left(\frac{dN_e}{dr}\right)_{max} = \frac{\pi}{2\rho}N_{eo} = \frac{125\pi}{2L_{max}}N_{eo} \quad (72)$$

Wird dies in (66) eingesetzt, so ergibt sich eine Streifenverschiebung z = 12. Die zusätzliche Streifenverschiebung z_K im Mach - Zehnder - Interferometer, auf Grund der Strahlkrümmung wäre

$$z_K = \frac{1}{12}\,\frac{\varkappa^2_{max}L^3_{max}}{\lambda} = 1{,}31 \quad (73)$$

d. h. das M.-Z.-I. ist hier nicht mehr in einfacher Weise anwendbar.

6) Empfindlichkeit des Differentialinterferometers.

Die untere Meßgrenze des Differentialinterferometers ist sowohl durch den Strahlabstand als auch durch die Meßkammerlänge bestimmt. Sie ist in ihrer Größe umgekehrt proportional zur Wellenlänge.
Man kann zunächst nach dem mittleren Gradienten über den Beobachtungsweg fragen, für den sich eine Verschiebung um eine Streifenbreite einstellt. Aus (18) folgt für eine Streifenverschiebung die Bedingung

$$\frac{dz}{dr} \cdot d = 1 \tag{74}$$

wenn mit d der Strahlabstand bezeichnet wird.
Aus (16) und (11) folgt zunächst

$$1 = -d \cdot 4{,}48 \cdot 10^{-14} \lambda \int_0^L \frac{dN_e(x,r)}{dr} dx \tag{75}$$

oder, unter Vernachlässigung des Vorzeichens

$$\int_0^L \frac{dN_e(x,r)}{dr} dx = \frac{10^{14}}{4{,}48 \cdot \lambda d} \tag{76}$$

(z=1)

Führt man mittels

$$\int_0^L \frac{dN_e(x,r)}{dr} dx = L \frac{d\bar{N}_e(r)}{dr}$$

einen über die Länge gemittelten Gradienten ein, so wird

$$\frac{d\bar{N}_e(r)}{dr} = \frac{10^{14}}{4{,}48 \lambda L d} \tag{77}$$

Für λ = 5461 Å und d = 28f = 2,58 · 10^{-1} cm wird

$$\frac{dN_e(r)}{dr} = \frac{1{,}60 \cdot 10^{18}}{L} \; [cm^{-3}/cm] \tag{78}$$

Bei 1 m Plasmalänge muß $\frac{dN_e(r)}{dr} = 1{,}6 \cdot 10^{16}$ cm^{-3}/cm sein, um eine Verschiebung um eine Streifenbreite zu bewirken. Aus Abb. 16 geht hervor, daß sich die Streifen in Richtung des Elektronendichtegradienten verschieben; dabei ist $w_1 + w_2 > 0$, d. h. die Summe der Prismenabstände von den Brennebenen der Spiegel ist positiv.

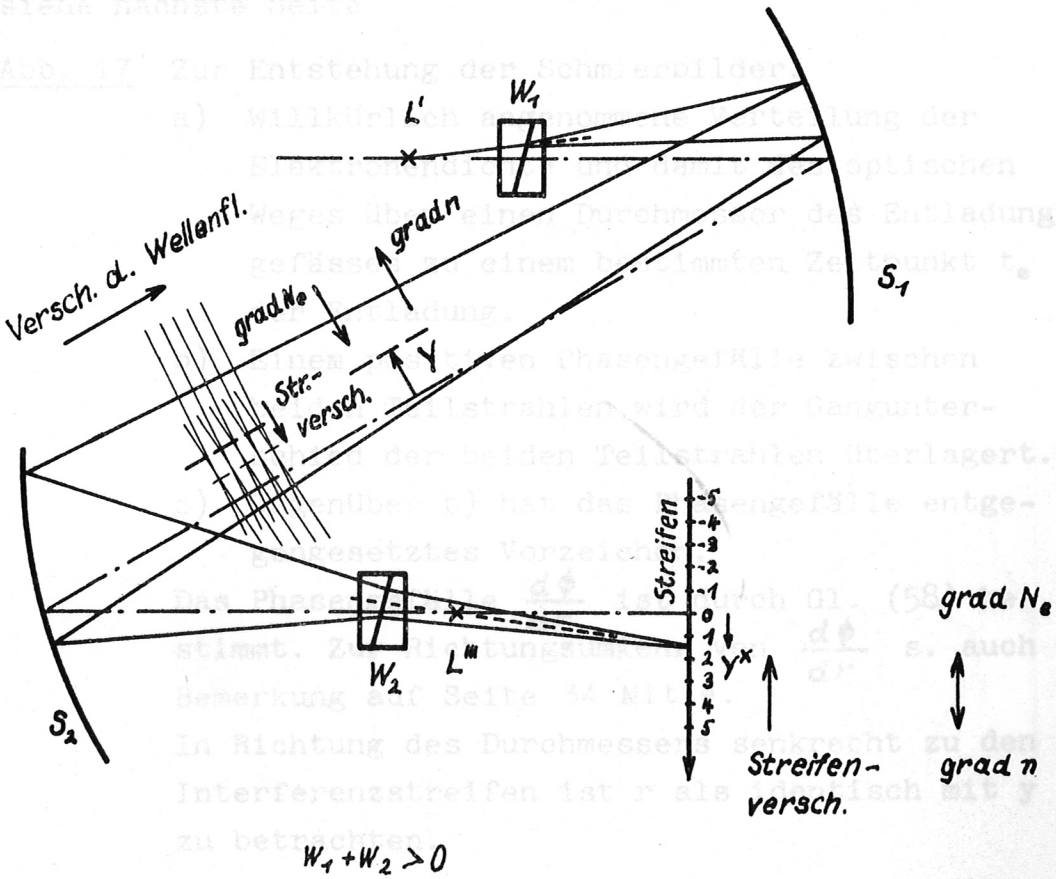


Abb. 16 Zuordnung der Richtung von Gradienten und Streifenverschiebung. Dieselbe Zuordnung wie hier besteht in Abb. 17 b.
Die Streifen verschieben sich entgegengesetzt zum Gradienten des Brechungsindex und in Richtung des Elektronendichtegradienten.

7) Entstehung der Schmierbilder

Methode der Auswertung

Die zur Messempfindlichkeit des D. - I. durchgeführten Betrachtungen setzen voraus, daß sich der Gradient der über den Beobachtungsweg gemittelten Elektronendichte innerhalb des Strahlabstandes nur relativ gering ändert. Dann ist die Dichteänderung (bzw. Änderung des optischen Weges) in radialer Richtung über den Strahlabstand sehr genau durch den Gradienten in der Mitte zwischen den beiden Teilstrahlen gegeben.

siehe nächste Seite

Abb. 17 Zur Entstehung der Schmierbilder.

a) Willkürlich angenommene Verteilung der Elektronendichte und damit des optischen Weges über einen Durchmesser des Entladungsgefässes zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 der Entladung.

b) Einem positiven Phasengefälle zwischen beiden Teilstrahlen wird der Gangunterschied der beiden Teilstrahlen überlagert.

c) Gegenüber b) hat das Phasengefälle entgegengesetztes Vorzeichen.

Das Phasengefälle $\frac{d\phi}{dr}$ ist durch Gl. (58) bestimmt. Zur Richtungsumkehr von $\frac{d\phi}{dr}$ s. auch Bemerkung auf Seite 34 Mitte.

In Richtung des Durchmessers senkrecht zu den Interferenzstreifen ist r als identisch mit y zu betrachten.

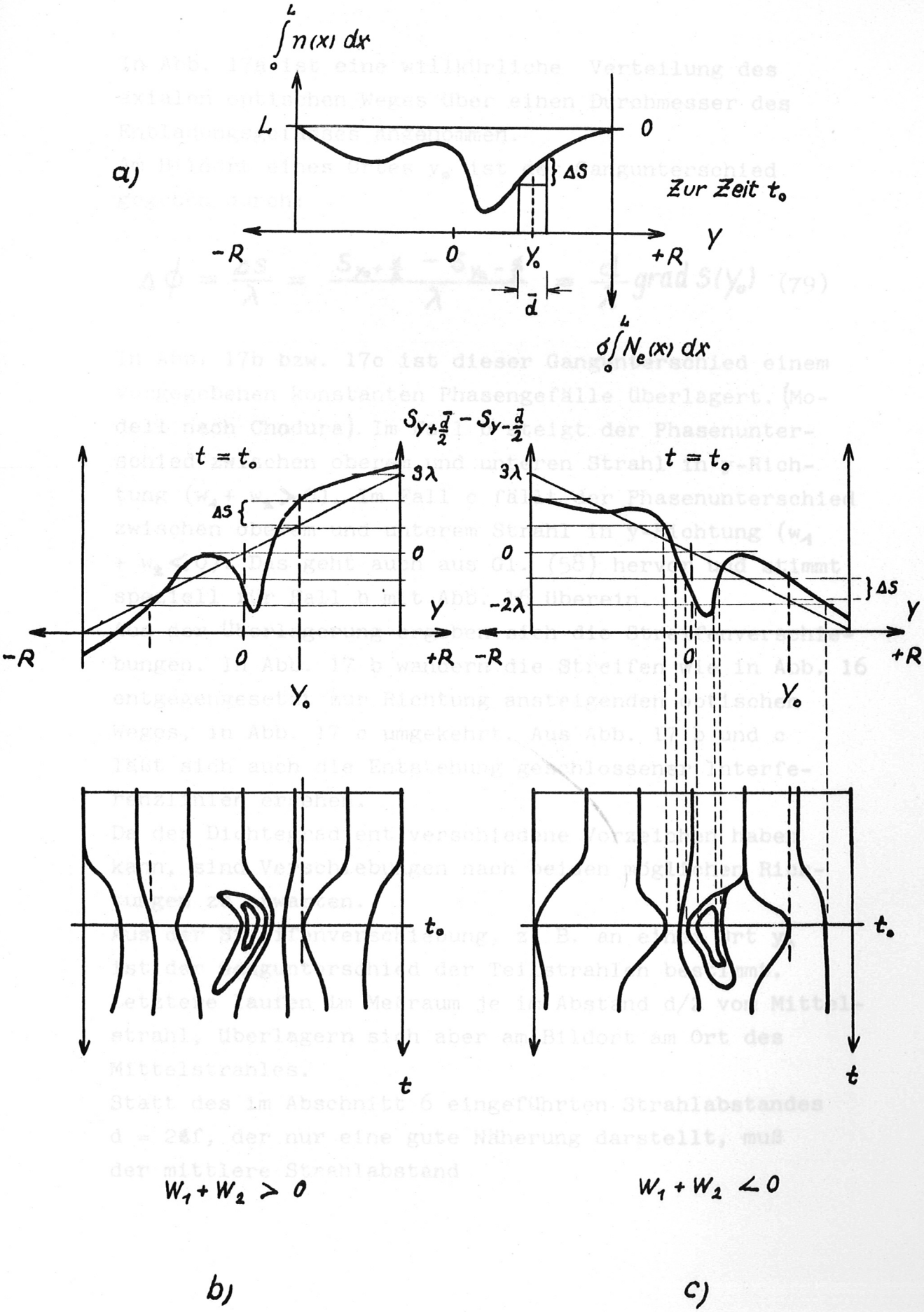


Abb. 17 Zur Entstehung der Schmierbilder

In Abb. 17a ist eine willkürliche Verteilung des axialen optischen Weges über einen Durchmesser des Entladungsgefässes angenommen.
Am Bildort eines Ortes y_0 ist der Gangunterschied gegeben durch:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta S}{\lambda} = \frac{S_{y_0+\frac{d}{2}} - S_{y_0-\frac{d}{2}}}{\lambda} = \frac{d}{\lambda}\,\mathrm{grad}\,S(y_0) \qquad (79)$$

In Abb. 17b bzw. 17c ist dieser Gangunterschied einem vorgegebenen konstanten Phasengefälle überlagert. (Modell nach Chodura). Im Fall b steigt der Phasenunterschied zwischen oberem und unteren Strahl in y-Richtung ($w_1 + w_2 > 0$). Im Fall c fällt der Phasenunterschied zwischen oberem und unterem Strahl in y-Richtung ($w_1 + w_2 < 0$). Das geht auch aus Gl. (58) hervor und stimmt speziell für Fall b mit Abb. 16 überein.
Aus der Überlagerung ergeben sich die Streifenverschiebungen. In Abb. 17 b wandern die Streifen wie in Abb. 16 entgegengesetzt zur Richtung ansteigenden optischen Weges, in Abb. 17 c umgekehrt. Aus Abb. 17 b und c läßt sich auch die Entstehung geschlossener Interferenzlinien ersehen.
Da der Dichtegradient verschiedene Vorzeichen haben kann, sind Verschiebungen nach beiden möglichen Richtungen zu erwarten.
Aus der Streifenverschiebung, z. B. an einem Ort y_0 ist der Gangunterschied der Teilstrahlen bestimmt. Letztere laufen im Meßraum je im Abstand d/2 vom Mittelstrahl, überlagern sich aber am Bildort am Ort des Mittelstrahles.
Statt des im Abschnitt 6 eingeführten Strahlabstandes $d = 2\varepsilon f$, der nur eine gute Näherung darstellt, muß der mittlere Strahlabstand

$$\bar{d} = 2\varepsilon(f-w_1) + 2\varepsilon'(a-e)$$

$$= 2\varepsilon f\left(1 + \frac{w_1 w_2}{w_1+w_2}\,\frac{a-2f}{f^2}\right) \qquad (80)$$

benützt werden. Die Abweichung von d = 2εf, beträgt wegen

$$\frac{1}{f}\,\frac{w_1 w_2}{w_1+w_2} \approx \text{einige } 10^{-2}$$

nur einige Prozente, liegt also innerhalb der Meßgenauigkeit.

Durch stufenweises Integrieren über die Intervallbreite d läßt sich der optische Weg s und mit Gl. (13) die Elektronendichte finden.

V) Anwendung des Differentialinterferometers zur Messung von Elektronendichtegradienten an einem Thetapinch.

Mit oben beschriebenem Differentialinterferometer wurden an einem Vorionisierungs - Thetapinch Interferenzaufnahmen gemacht. Es wurden Schmieraufnahmen mit einer Drehspiegelkamera und Momentaufnahmen des ganzen Querschnitts mit einer Bildwandler - Kamera gemacht. Zur Prüfung der Rotationssymmetrie wurden Schlierenbilder mit der Bildwandlerkamera aufgenommen. Die Elektronendichte und der zeitliche Verlauf der Entladung in dem Pinch wurde vorangehend mit einer spektroskopischen Methode ermittelt [8]. Die hier angestellten Messungen dienten also sowohl zur Erprobung des Differentialinterferometers am Plasma, als auch zum Vergleich der Meßergebnisse bei verschiedenen Methoden.
Mit dem D. - I. können nur Dichtegradienten mit einer zu den Interferenzstreifen senkrechten Komponente festgestellt werden. Bei Beobachtung über den ganzen Querschnitt ist deshalb in der Umgebung eines streifenparallelen Durchmessers keine Aussage über die Rotationssymmetrie der Entladung möglich. Die Schlierenmethode erlaubt ebenfalls - aber praktisch nur qualitativ - Dichtegradienten festzustellen. Ist die verwendete Anordnung rotationssymmetrisch, so lassen sich Dichtegradienten in jede Richtung gleichermaßen feststellen. Eine derartige Anordnung wurde für die Schlierenbilder verwendet.

1) Meßanordnung x)

Die Meßanordnung besteht aus dem Differentialinterferometer, dem optischen Aufnahmeteil für Schmier- oder Momentaufnahmen, der Theta - Spule mit Stoßbatterie, sowie Pumpstand und dem Triggersystem. Der optische Auf-

---

x) zu den Batteriedaten s. auch [8].

nahmeteil ist bereits in Abb. 4 mit eingezeichnet. Das zu untersuchende Plasma befindet sich zwischen den beiden Hohlspiegeln. Die Daten des Aufnahmeteiles für die durchgeführten Experimente sind in Abb. 18 zu entnehmen. Die gegenseitige Lage von Spule, Spalt und Interferenzstreifen ist in Abb. 20 angegeben.

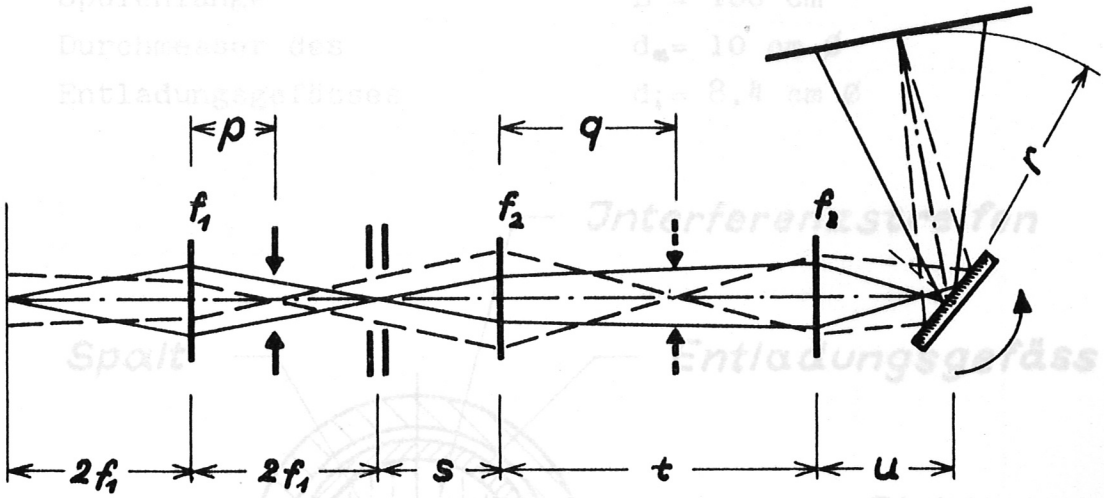


Abb. 18 Optische Daten des Aufnahmeteiles. Die Beschreibung wurde in Abschnitt IV, 1 gegeben.
Im Experiment war: p = 10 cm, q = 13,5 cm,
s = 11,2 cm, t = 60 cm,
u = 13,7 cm, r = 20,7 cm.
Die Brennweiten der Linsen sind $f_1 = f_3$ = 19,1 cm
f_2 = 9,5 cm

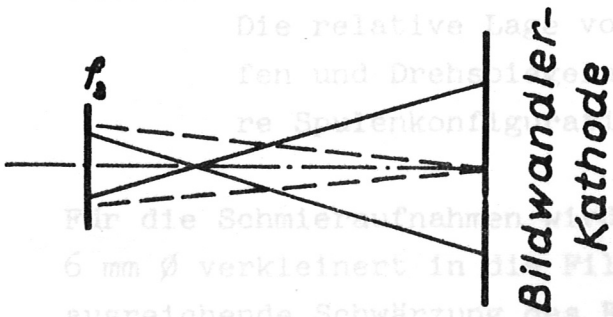


Abb. 19 Anordnung für Bildwandleraufnahmen. Hierbei entfällt der Spalt.

Der Entladungskreis hat folgende Daten:

Ladeenergie	W= 0,6 kJ
Kapazität	C = 3µF
Induktivität	L = 19,4 nH
Frequenz	f = 660 kHz
Ladespannung	U = 20 kV
Spulenlänge	L = 100 cm
Durchmesser des	d_a= 10 cm Ø
Entladungsgefässes	d_i= 8,4 cm Ø

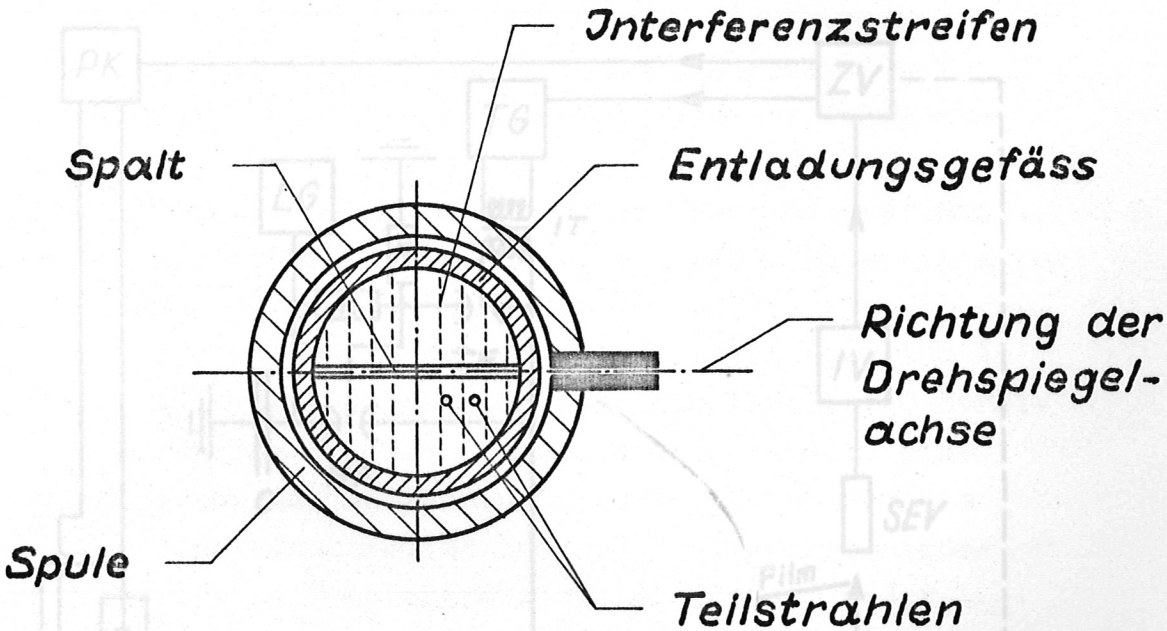


Abb. 20 Lage des Spalts zur Thetaspule.
Die relative Lage von Spalt, Interferenzstreifen und Drehspiegelachse bleibt auch für andere Spulenkonfigurationen dieselbe.

Für die Schmieraufnahmen wird der Gefäßquerschnitt auf 6 mm Ø verkleinert in die Filmebene abgebildet. Eine ausreichende Schwärzung des Films (Agfa X-Pan u. "Royal")

erfordert diese Bildgröße. Das Spaltbild auf dem Film ist etwa 1/10 mm breit, Der Abstand r des Films vom Drehspiegel (s. Abb. 18) ist so gewählt, daß sich als Schreibgeschwindigkeit 1 mm/µs ergibt. Daraus folgt eine Zeitauflösung von 10^{-7} Sekunden.
In Abb. 20 ist der Spalt parallel zum Spulenschlitz, da in dieser Richtung die größte Abweichung von der Symmetrie zu erwarten ist. Durch einfaches Drehen der Prismen und des Spalts kann über jeden beliebigen anderen Durchmesser beobachtet werden.

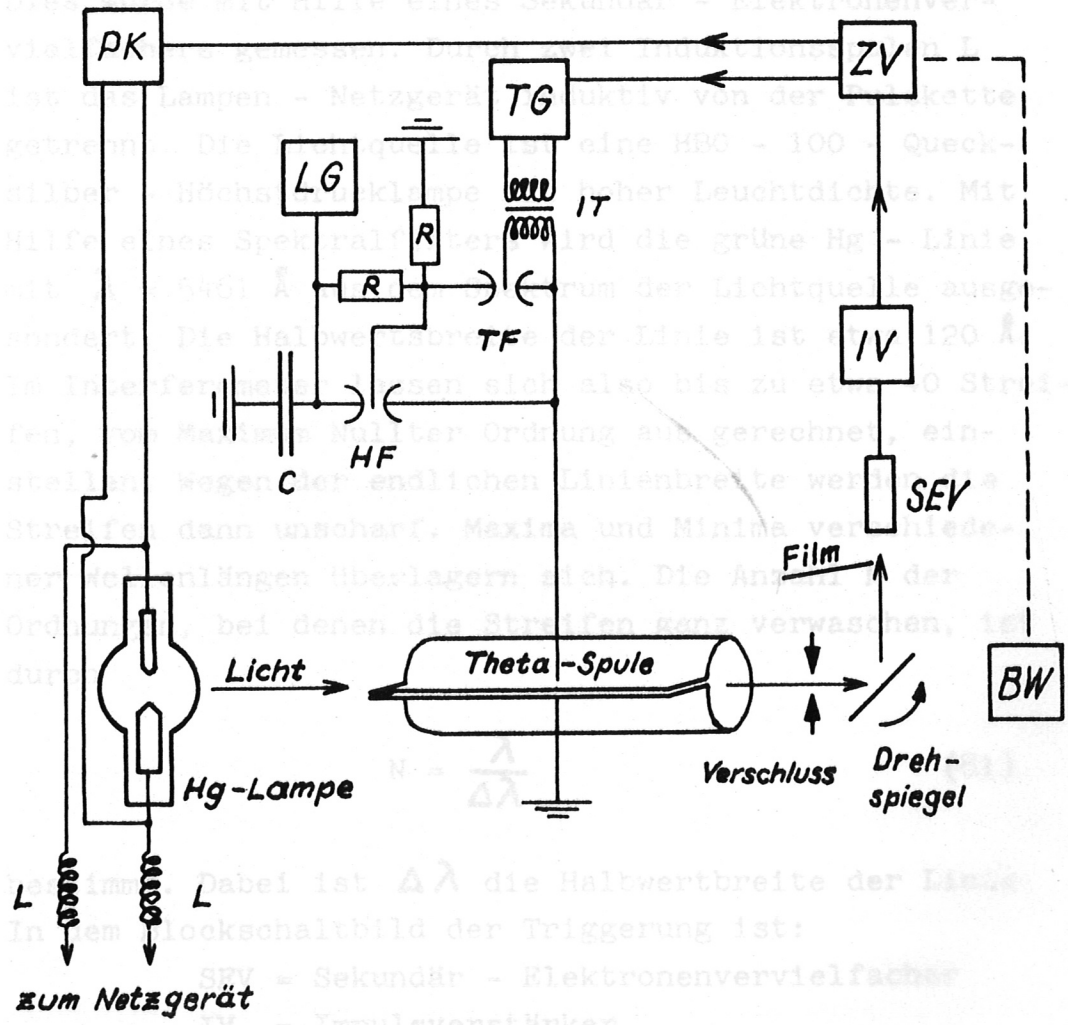


Abb. 21 Blockschaltbild der Triggerung.

Bei Schmieraufnahmen erfolgt die Triggerung, wenn sich der Drehspiegel in einer aufnahmebereiten Stellung befindet. Dazu wird der Spalt über den Drehspiegel auf den Eintrittsspalt des Sekundär - Elektronenvervielfachers abgebildet. Bei Momentaufnahmen wird die Bildwandlerkamera elektronisch mit der von Hand ausgelösten Entladung synchronisiert.
Um eine ausreichende Schwärzung des Filmes zu erhalten, wird die Lichtquelle während der Beobachtungszeit von 10μs gepulst. Die dadurch erzielte Intensitätssteigerung ist etwa das 20 - fache des stationären Betriebs. Dies wurde mit Hilfe eines Sekundär - Elektronenvervielfachers gemessen. Durch zwei Induktionsspulen L ist das Lampen - Netzgerät induktiv von der Pulskette getrennt. Die Lichtquelle ist eine HBO - 100 - Quecksilber - Höchstdrucklampe mit hoher Leuchtdichte. Mit Hilfe eines Spektralfilters wird die grüne Hg - Linie mit λ = 5461 Å aus dem Spektrum der Lichtquelle ausgesondert. Die Halbwertsbreite der Linie ist etwa 120 Å. Im Interferometer lassen sich also bis zu etwa 40 Streifen, vom Maximum Nullter Ordnung aus gerechnet, einstellen. Wegen der endlichen Linienbreite werden die Streifen dann unscharf. Maxima und Minima verschiedener Wellenlängen überlagern sich. Die Anzahl N der Ordnungen, bei denen die Streifen ganz verwaschen, ist durch

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad (81)$$

bestimmt. Dabei ist $\Delta\lambda$ die Halbwertbreite der Linie.
In dem Blockschaltbild der Triggerung ist:

SEV = Sekundär - Elektronenvervielfacher
IV = Impulsverstärker
ZV = Zeitverzögerungsgerät

TG = Triggergerät
LG = Ladegerät
PK = Laufzeitkette
BW = Bildwandler
IT = Impulstrafo
TF = Triggerfunkenstrecke
HF = Hauptfunkenstrecke

Zur Schlierenbeobachtung waren lediglich die Wollastonprismen und Pol. - Filter aus dem Strahlengang zu entfernen und an die Orte L bzw. L'' der Lichtquellenbilder (s. Abb. 11 bzw. 13) Blenden zu setzen. Der Strahlengang ist in Abb. 22 a dargestellt. Am Ort L der Lichtquelle, in der Brennebene des Spiegels S_1 ist eine kreisförmige Lochblende LB mit 1 mm Ø angebracht. Deren gleichmäßige Ausleuchtung ist wegen der Größe der Lichtquelle bei L gewährleistet. Die Lichtquellengröße ist dort 1,7 x 2,4 mm. Die nun kreisförmige Lichtquelle wird in die Brennebene des Spiegels S_2 abgebildet. Dort befindet sich eine gleich große kreisförmige Blattblende BB, konzentrisch zum Bild der Lochblende. Nach der zweiten Blende ist das Licht also ganz ausgeblendet. Auf Grund von Beugungseffekten und eventuellen Bildfehlern, sowie Unregelmäßigkeiten der Blenden läßt sich allerdings keine vollkommene Dunkelheit des Gesichtsfeldes hinter der zweiten Blende erreichen.
In Abb. 22 sind zwei, zur Abbildung der Lochblende beitragende, Randstrahlen eingezeichnet. Ihre Richtung ist so gewählt, daß beide durch das gleiche Gebiet im Plasma mit inhomogenem Brechungsindex gehen. Dadurch werden sie gleich stark abgelenkt. Das gilt aber für alle anderen Strahlen, die durch dasselbe inhomogene Gebiet gehen. Die Lochblende wird also von den abgelenkten Strahlen exzentrisch auf die Blattblende abgebildet.
Die Teilintensität des Bildes ist gleich dem Verhältnis des

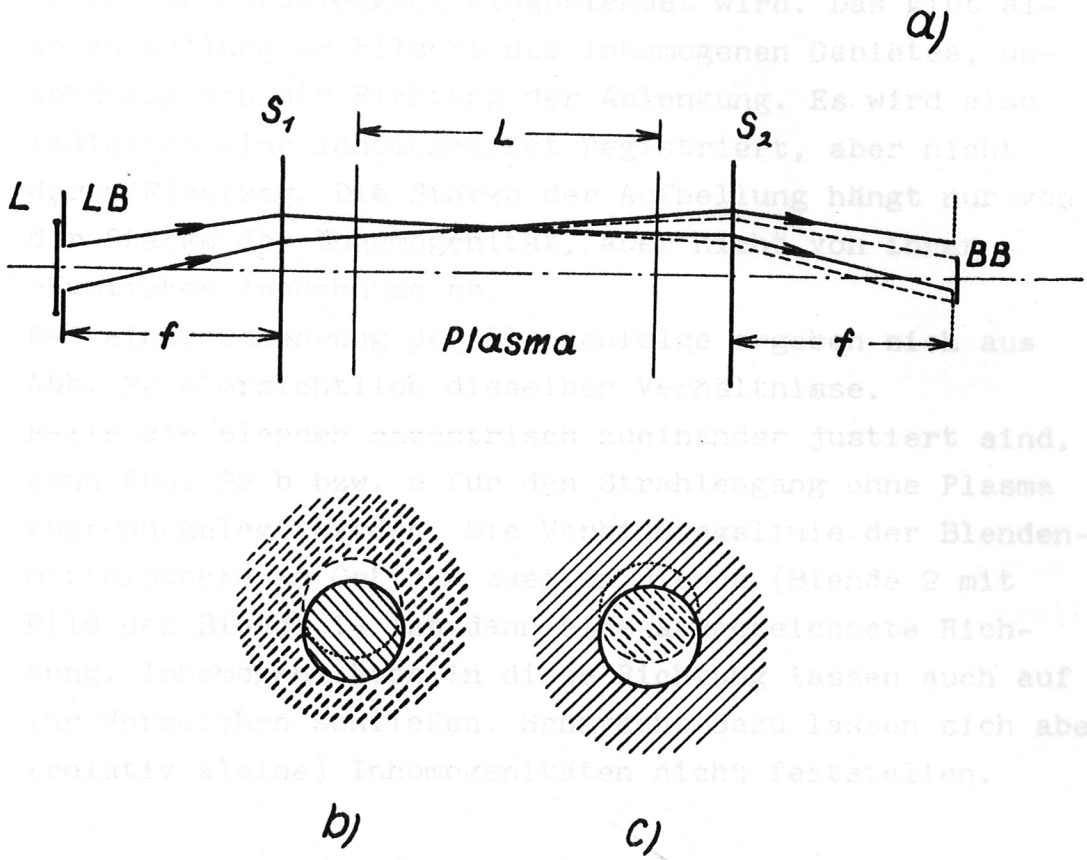


Abb. 22 Schlieren - Anordnung

a) Strahlengang (Die Spiegel sind als Linsen dargestellt).

b) Bild der Lochblende (gestrichelt), von abgelenkten Strahlen erzeugt, am Ort der Blattblende, entsprechend Fig. a.
Symbol der Blendenfolge : ○—●

c) Hier sind die Blenden in ihrer Reihenfolge gegenüber b) vertauscht.
Blendenfolge: ●—○

Querschnitts des inhomogenen Gebietes zum gesamten Bündelquerschnitt.

Aus Abb. 22 b geht hervor, daß durch das exzentrische Teilbild der Lochblende ein sichelförmiges Gebiet bei BB in den Strahlengang eingeblendet wird. Das gibt also Aufhellung am Bildort des inhomogenen Gebietes, unabhängig von der Richtung der Ablenkung. Es wird also lediglich eine Inhomogenität registriert, aber nicht deren Richtung. Die Stärke der Aufhellung hängt nur von der Stärke der Inhomogenität, aber nicht von ihrer räumlichen Ausdehnung ab.
Bei einer Umkehrung der Blendenfolge ergeben sich aus Abb. 22 c ersichtlich dieselben Verhältnisse.
Falls die Blenden exzentrisch zueinander justiert sind, kann Abb. 22 b bzw. c für den Strahlengang ohne Plasma zugrundegelegt werden. Die Verbindungslinie der Blendenmittelpunkte am Ort der zweiten Blende (Blende 2 mit Bild der Blende 1) ist dann eine ausgezeichnete Richtung. Inhomogenitäten in diese Richtung lassen auch auf ihr Vorzeichen schließen. Senkrecht dazu lassen sich aber (relativ kleine) Inhomogenitäten nicht feststellen.

2) Messungen und ihre Diskussion.

A) Interferometrische Aufnahmen.

a) Schmierkamera - Aufnahmen

Die Abb. 23, 24 und 25 sind Schmieraufnahmen. Bei den Aufnahmen 23 und 24 wurden jeweils 16 Streifen eingestellt. Das entspricht einem Abstand der Streifen von ca. 5 mm an ihrem virtuellen Gegenstandsort. Abb. 25 zeigt eine Interferenzaufnahme Nullter Ordnung. Da sich das Entladungsgefäß in der Mitte zwischen den beiden Hohlspiegeln befand, wurden die Prismenabstände gleich groß gewählt: $w_1 = w_2 = -22$ mm (das Vorzeichen im Sinne von Abb. 11). Durch die negativen w ist Abb. 17 c für die Richtung der Streifenverschiebung heranzuziehen. Die

Spulenschlitz

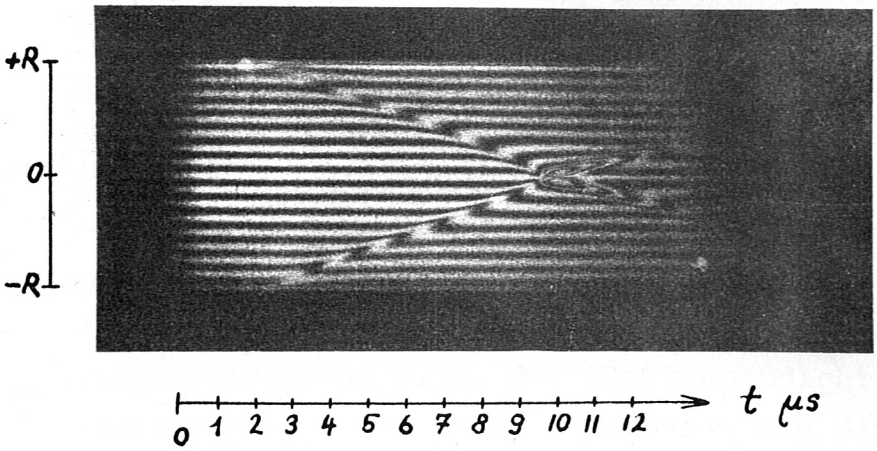


Abb. 23
Interferenzaufnahme mit 16 Streifen bei

$6 \cdot 10^{-1}$ Torr

Spulenschlitz

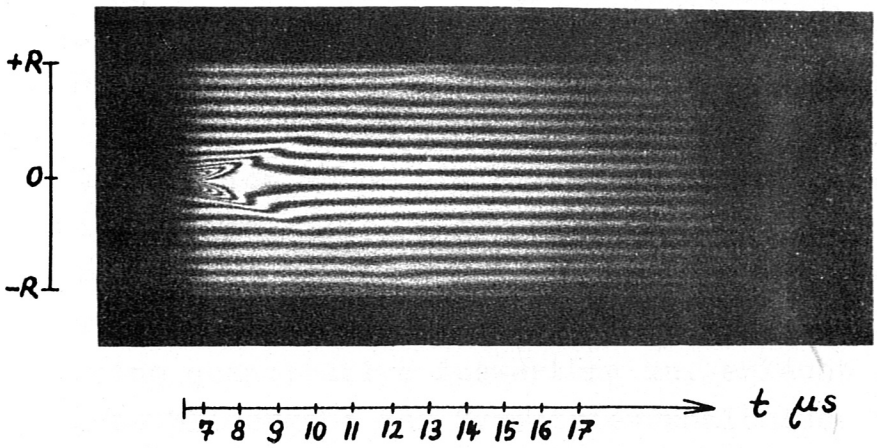


Abb. 24
Interferenzaufnahme mit 16 Streifen bei

$5 \cdot 10^{-1}$ Torr

Gegenüber Bild 1 ist die Pulsung der Lampe um 6,5µs verzögert

Spulenschlitz

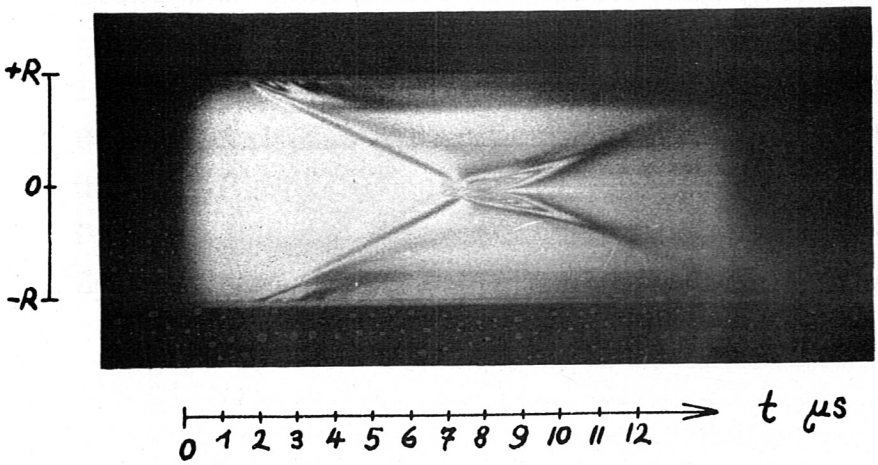


Abb. 25
Interferenzaufnahme mit dem Maximum Nullter Ordnung bei

$6 \cdot 10^{-1}$ Torr

Streifen werden in Richtung abnehmender Elektronendichte verschoben. Die Auswertung der Abb. 23 ist für verschiedene Zeitpunkte in Abb. 26 wiedergegeben. Aus der Streifenverschiebung wurde der Gradient der Elektronendichte entnommen und durch Integration die Dichteverteilung über den Durchmesser erhalten. In der Figur ist auch der Meßfehler und der Strahlabstand angegeben. Die mit der spektroskopischen Methode bei dem angegebenen Druck erhaltenen Werte der Elektronendichte sind mit eingetragen, sowie deren Meßfehler. Sie dienen als Integrationskonstante. Die Beobachtung erfolgte hierbei an den Orten r = 0, r = R/2, und r = R, jeweils über eine Breite von etwa 8 mm gemittelt[8].
In Abb. 24 ist die Lampe um 6,5 μs gegenüber der Zündung der Batterie verzögert, da die Puls - Zeit der Lampe kleiner als die gesamte Beobachtungszeit ist. Diese Aufnahme ist in Abb. 27 für 2 Zeitpunkte ausgewertet. Die Entladung ist stärker, als die in Abb. 23. Bei der Integration wurde die Elektronendichte am Rand als Null angenommen.
In Abb. 25 ist über den ganzen Durchmesser das Maximum Nullter Ordnung eingestellt. Die Aufnahme läßt zwar keine quantitative Auswertung zu, erlaubt aber eine gute Wiedergabe der Symmetrieverhältnisse über den beobachteten Durchmesser.

b) Moment - Aufnahmen.

Wegen ihrer geringen Bildqualität sind Momentaufnahmen nicht zur quantitativen Auswertung geeignet. Immerhin zeigen sie gut den qualitativen Raum - zeitlichen Verlauf einer Entladung. Besonders eignet sich hier zur Beobachtung das Interferenz - Maximum Nullter Ordnung über den ganzen Querschnitt der Entladung.
Die Abb. 28 ist eine Aufnahme zu drei verschiedenen Zeitpunkten einer Entladung. Wären Int. - Streifen

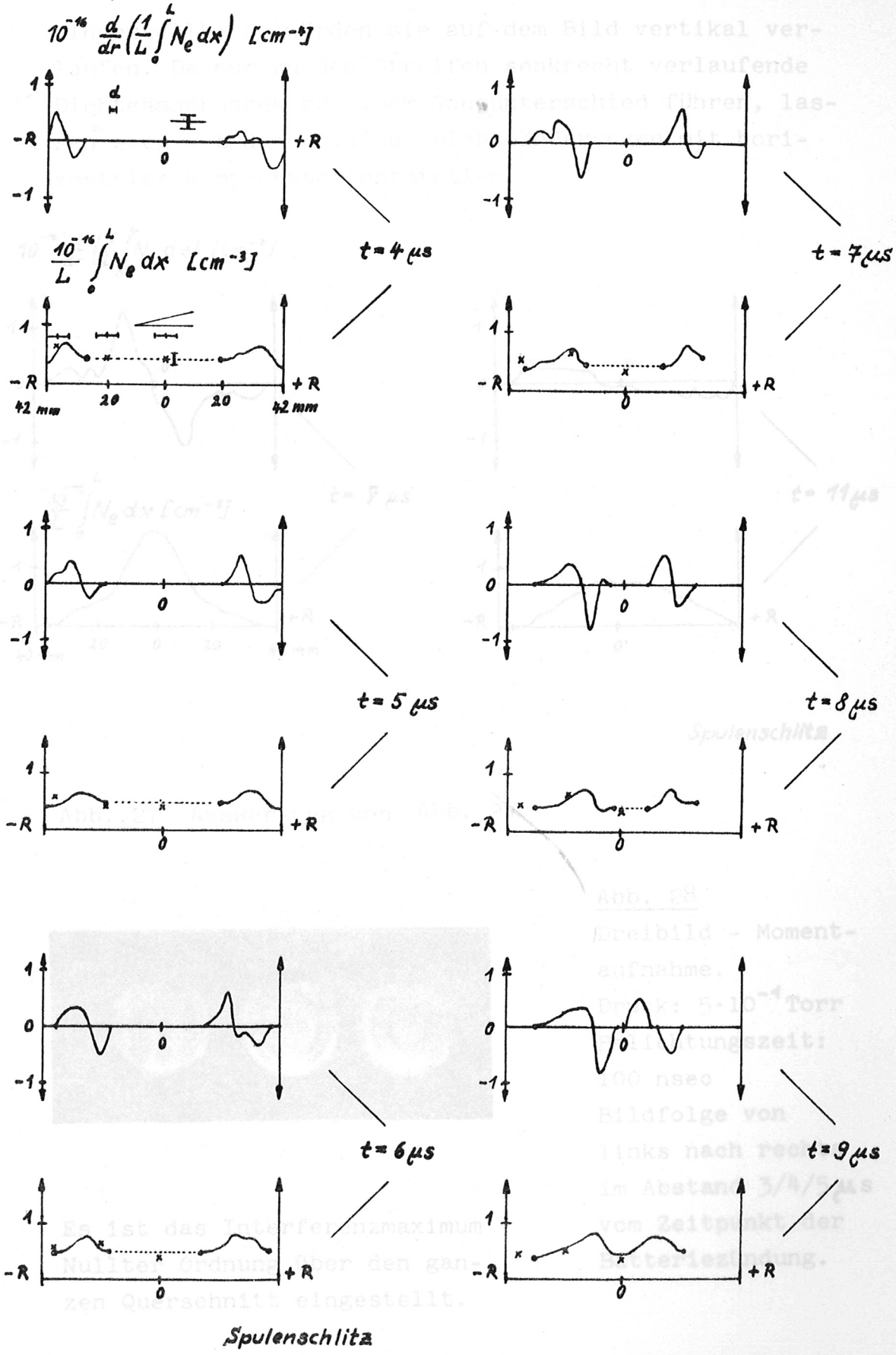


Abb. 26 Auswertung von Abb. 23 im zeitlichen Abstand von je 1 µs.

eingestellt, so würden sie auf dem Bild vertikal verlaufen. Da nur zu den Streifen senkrecht verlaufende Dichteänderungen zu einem Gangunterschied führen, lassen sich auf dem Bild nur Dichteänderungen mit horizontaler Komponente feststellen.

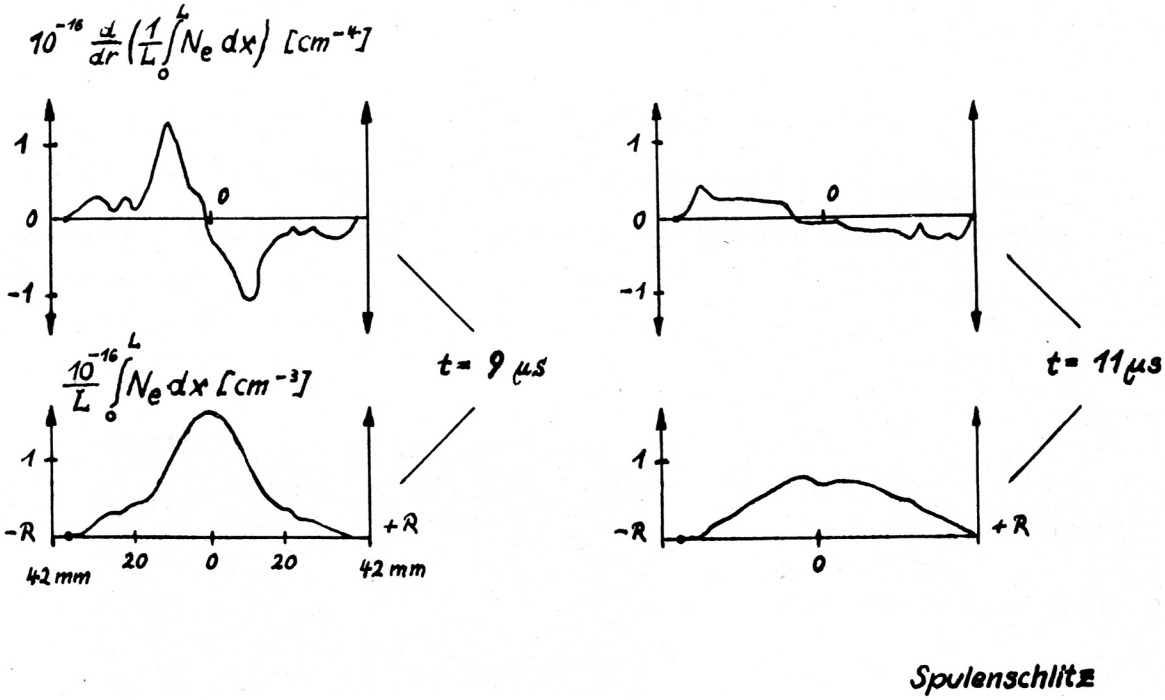
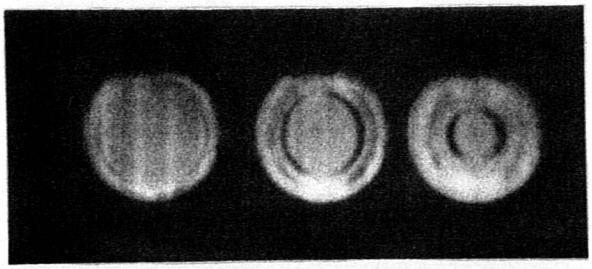


Abb. 27 Auswertung von Abb. 24



Es ist das Interferenzmaximum Nullter Ordnung über den ganzen Querschnitt eingestellt.

Abb. 28
Dreibild - Momentaufnahme.
Druck: $5 \cdot 10^{-1}$ Torr
Belichtungszeit: 100 nsec
Bildfolge von links nach rechts im Abstand 3/4/5 μs vom Zeitpunkt der Batteriezündung.

B) Schlieren - Momentaufnahmen

Die Abb. 29, 30 und 31 sind Schlierenaufnahmen.
Abb. 29 ist innerhalb der Zeit aufgenommen, während der sich das Plasma zur Mitte des Entladungsgefässes bewegt. Die Abb. 30 und 31 sind während der Expansion des Plasmas aufgenommen.

Dreibild - Schlieren - Momentaufnahmen.

Zeitliche Bildfolge von links nach rechts im angegebenen Abstand $t_1/t_2/t_3$ in μs vom Zeitpunkt der Batteriezündung.

Belichtungszeit: 200 nsec

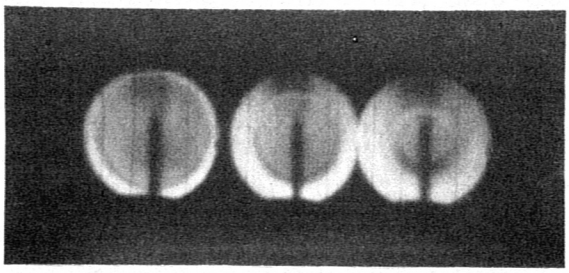


Abb. 29
Druck: $6 \cdot 10^{-1}$ Torr
3/4/5
Blendenfolge: ●—○

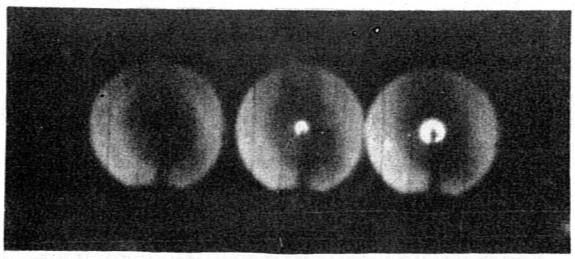


Abb. 30
Druck: $5 \cdot 10^{-1}$ Torr
6/7/8
Blendenfolge: ●—○

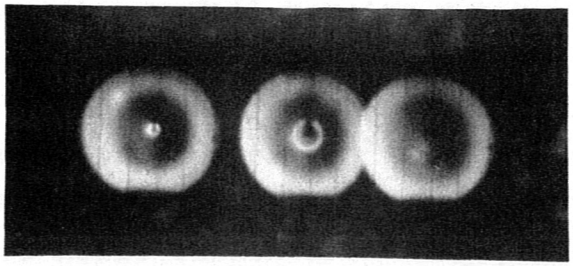


Abb. 31
Druck: $6 \cdot 10^{-1}$ Torr
7/8/11
Blendenfolge: ○—●

C) Diskussion der Ergebnisse

Aus Abb. 26 läßt sich Folgendes entnehmen:
Im Lauf der Entladung bildet sich eine Plasmawelle aus, die von außen nach innen läuft. Am Innenrand der Thetapinch - Spule ist die induzierte elektrische Feldstärke am größten. Dementsprechend ist dort die Ionisation am stärksten. Es entsteht ein zylindrischer, dem Spulenstrom entgegengesetzter Ringstrom, der das innerhalb davon befindliche Magnetfeld abschwächt. Dadurch entsteht ein zur Spulenachse hin gerichteter magnetischer Druck auf den Plasmazylinder, was eine Kompression zur Folge hat. Wegen der Batteriedämpfung [8] tritt der magnetische Druck nur im Anfangsstadium der Entladung auf. Dann bewegt sich das Plasma nahezu gleichförmig mit etwa $8 \cdot 10^5$ cm/sec infolge seiner Trägheit. Wie sich aus Abb. 26 ersehen läßt, nimmt der Dichtegradient an der Innenfront des Plasmazylinders im Lauf der Zeit zu.
Das Plasma wird auf die Spulenachse komprimiert und läuft dann wieder auseinander, was aus Abb. 27 hervorgeht. Bei der Kompression an der Achse tritt keine merkbare Steigerung des Ionisationsgrades mehr auf, da einerseits die Batterie bereits ausgedämpft ist, andererseits die Temperatur der Elektronen durch die Kompression nicht wesentlich steigt [8].
Die Abb. 28 bestätigt die Aufsteilung der Innenfront der nach innen laufenden Plasmawelle. Der innere, dunklere Ring ist durch stärkere Änderung der Elektronendichte verursacht, als der äußere. Die Rotationssymmetrie der Entladung ist zum Teil bereits gut erkennbar.
Aus der Schlierenaufnahme Abb. 29 läßt sich im Rahmen der Bildqualität Rotationssymmetrie des Plasmas entnehmen, während es sich zur Spulenachse bewegt. Der Dichtegradient reicht für eine deutliche Aufhellung (zwei helle benachbarte Ringe) nicht aus. Es gibt nur

Intensitätsverschiebungen (Justierung nicht exakt Konzentrisch; s. Abschnitt V 1), letzter Absatz).
Die Abb. 30 und 31 lassen auf ein konzentrisches Gebiet mit starkem Dichtegradienten schließen. Es bewegt sich mit der Zeit zum Gefäßrand hin, wobei der Gradient abnimmt. Das ist qualitativ in Übereinstimmung mit Abb. 27.
Wie in Abschnitt V 1) am Schluß bemerkt, tritt für die beiden, in Abb. 30 bzw. 31 gewählten Blendenfolgen jedesmal Aufhellung beim Auftreten starker Dichtegradienten ein. Die Blendenfolge ist dabei belanglos.

Literatur

[1] Alpher White — Physics of Fluids Bd. 1 S. 452 (1958)

Ascoli - Bartoli, De Angelis Matelucci — Wavelength Dependence of the Refractive Index of Plasma in the Optcal Region. Il Nuovo Cimento, 18 ser 10, 1116 1960

Medford, Powell, Hunt und Wright — Interferometric Mesurements of Electron Density in Deuterium Plasma. S. 2000 ff.

E. Fünfer, K. Hain, P. Igensbergs, F. P. Küpper — Messung der radialen Elektronendichte und Magnetfeldverteilung beim Thetapinch und Vergleich mit numerischen Rechnungen. Zeitschr. f. Nat. Forsch. Nr. 17 a, 1962 S. 967 ff.

C. Andelfinger, P. Igenbergs, W. von Jaskowsky. — Interferometrische Messung der Elektronendichte in einer stromstarken Wasserstoffentladung. Vortrag auf dem 6. Internat. Kongreß über Kurzzeitfotografie. 1962 Den Haag - Scheveningen, Niederl.

C. Andelfinger, P. Igenbergs, W. von Jaskowsky — Interferometrische Messung der Elektronendichte beim Induktionspinch. Vortrag bei der Tagung der bayerischen physikalischen Gesellschaft und Gesellschaft für Strahlenschutz. München 1962

[2] P. Igenbergs — Interferometrische Messung der Elektronendichte am Thetapinch. Dipl.-A. Univ. München Ausgef. Am IPP Garching Jan. 1963

[3] F. P. Küpper — Kurzzeitaufnahmen der Interferenzstreifenverteilung über den Querschnitt des Entladungsgefässes einer Thetapinchanlage. Diplomarbeit, IPP Garching 1/10 Mai 1963

[4] W. Kinder — Optik 1. Bd. S. 413 ff. (1946) Theorie des Mach - Zehnder - Interferometers und Beschreibung eines Gerätes mit Einspiegeleinstellung.

[5] G. Nomarski — Microinterféromètre différentiel á ondes polarisées. J. de Phys. 16 (1955) 95 - 135

[6] H. Oertel — High - Speed Photography of Hypersonic Phenomena by a Schlieren Interferometric Method. Fifth international Congress on High - Speed Photography. N 8 Washington D. C. Okt. 1960

Visualisierung kurzzeitiger Hyperschallströmungen mit Hilfe eines Differentialinterferometers grosser Öffnung.
6. Int. Kongress über Kurzzeitfotografie. 1962
Den Haag - Scheveningen, Niederl.

[7] E. Fünfer, G. Lehner — Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. B. XXXIV (1962)

[8] P. M. Asam — Spektroskopische Bestimmung der Elektronendichte und Temperatur in Vorionisierungs - Plasmen.
Diplomarbeit. IPP Garching, Mai 1964

ANHANG

1) Zusätzliche Bemerkungen zum Differentialinterferometer

a) Vertauschung der Maxima und Minima

Wird eines der Polarisationsfilter um 90° gedreht, dann vertauschen sich Maxima und Minima. Dies ist in Abb. 32 dargestellt.

In Abb. 32 a) ist das erste Polarisationsfilter um 90° gedreht. Die Komponente a bleibt unverändert, die Komponente b wechselt das Vorzeichen: $b_{\frac{\pi}{2}} = -b$. In Bezug auf das zweite Pol.-Filter vertauscht die Komponente $b_{\parallel}$ ihr Vorzeichen $b_{\parallel} \rightarrow -b_{\parallel} = b_{\parallel\frac{\pi}{2}}$, während die Komponente $a_{\parallel}$ ihre Richtung beibehält.

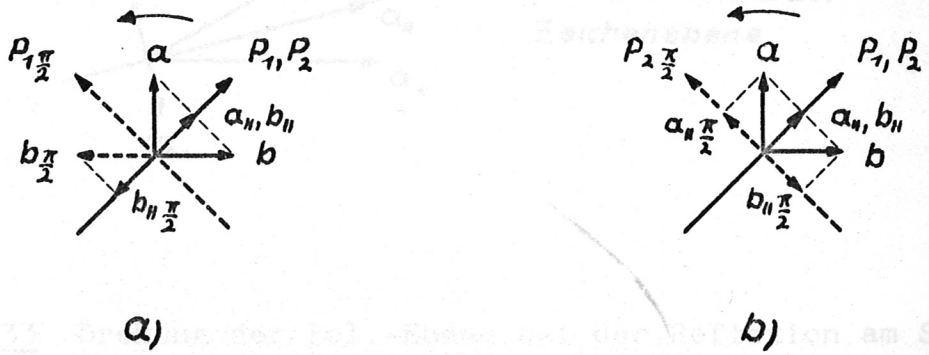


Abb. 32 Zur Vertauschung der Maxima und Minima.

Es tritt ein Phasenunterschied um π hinzu. Maxima und Minima vertauschen sich.

In Abb. 32 b) ist das zweite Polarisationsfilter gedreht. Ursprünglich waren die Komponenten $a_{\parallel}$ und $b_{\parallel}$ gleich gerichtet. Die Komponenten $a_{\parallel\frac{\pi}{2}}$ und $b_{\parallel\frac{\pi}{2}}$ haben entgegengesetzte Richtung. Es tritt ein Phasenunterschied um π hinzu. Maxima und Minima vertauschen sich.

b) Die Drehung der Polarisationsebene bei der Reflexion an den Spiegeln.

Auf Grund der Fresnelschen Formeln erfährt die zur Einfallsebene senkrechte Komponente bei Reflexion am Spiegel einen Phasensprung um π. Das bewirkt eine Spiegelung der Polarisationsrichtung an der Einfallsebene (s. Abb. 33). Die beiden Teilbündel bleiben also zwischen den Spiegeln senkrecht zueinander polarisiert, sind aber im Ganzen gedreht. Die Drehung wird bei der Reflexion am zweiten Spiegel wieder rückgängig gemacht.

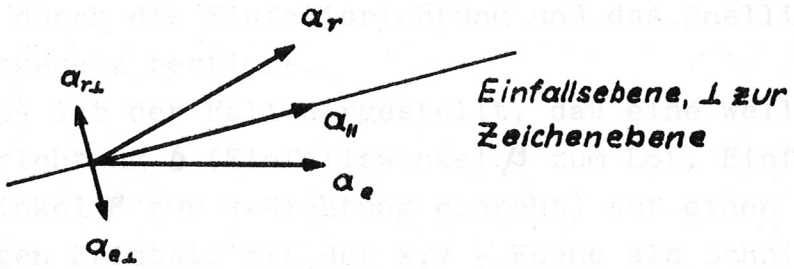


Abb. 33 Drehung der Pol.-Ebene bei der Reflexion am Spiegel.

c) Drehung der Polarisationsebene durch den Faraday-Effekt.

Der Drehwinkel χ längs eines Magnetfeldes B und bei der Elektronendichte N_e ist

$$\chi = \frac{1}{2c}\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \frac{e}{m} BL = 2{,}62 \cdot 10^{-13} \lambda^2 L B N_e \qquad (82)$$

Mit λ = 5461 Å wird

$$\chi = 7{,}8 \cdot 10^{-22} L B N_e \qquad (83)$$

Für eine Elektronendichte $N_e = 10^{16} cm^{-3}$ wird bei 100 cm Weglänge parallel zum Magnetfeld und 10 kΓ

$$\chi = 7{,}8 \cdot 10^{-3} \approx 10^{-2} \text{ Bogen} \qquad (84)$$

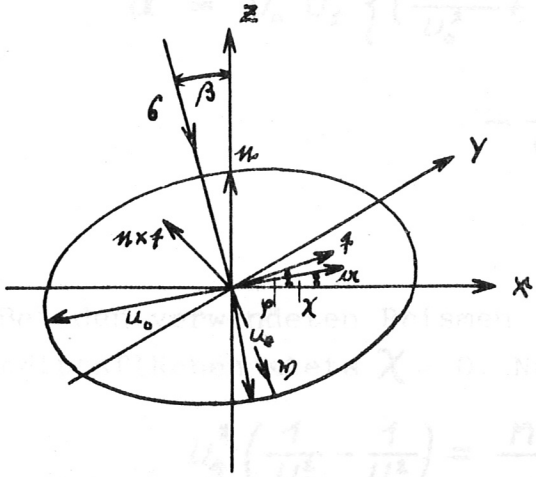
Die Faraday Drehung ist also vernachlässigbar.

2) Die Strahlrichtung im Kristall

Bei der Behandlung des Strahlenganges im Wollastonprisma wurde behauptet, daß in erster Näherung die Strahlrichtung mit der Wellennormalen gleichgesetzt werden kann. Bei quasiisotroper Betrachtung ist die Richtung der Wellennormalen im Kristall durch die Einfallsrichtung und das Snellius´sche Brechungsgesetz bestimmt.

In Abb. 34 ist der Fall dargestellt, daß eine Welle mit der Einfallsrichtung $\mathfrak{b}$ (Einfallswinkel β zum Lot, Einfallsebene um den Winkel φ zur x-Richtung gedreht) auf einen optisch einachsigen Kristall mit der x,y - Ebene als Schnittebene fällt. Die optische Achse des Kristalls habe den Winkel χ zur x - Achse und liege in der x,z - Ebene. Die Richtung ist durch den Einheitsvektor $\mathfrak{u}$ bezeichnet.

Es interessiert unter den gegebenen Voraussetzungen die Geschwindigkeit und die Richtung $\mathfrak{n}$ des Strahles im Kristall. Wenn die Welle in den Kristall eintritt, wird sie in zwei senkrecht zueinander polarisierte Komponenten aufgespalten. Eine Komponente pflanzt sich, unabhängig von ihrer Ausbreitungsrichtung mit der ordentlichen Strahl- (hier auch gleich Wellen-) geschwindigkeit u_o fort. Die Fortpflanzung der anderen Komponente ist in ihrer Geschwindigkeit richtungsabhängig. Die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einem in Abb. 34 eingezeichneten Rotationsellipsoid mit der Halbachse u_o in Richtung der optischen Achse, sowie mit der Halbachse u_e.



$$\mathfrak{x} = \{\cos\chi; 0; \sin\chi\}$$

$$\mathfrak{n} = \{0; 0; 1\}$$

$$\sigma = \{\sin\beta\cos\varphi; \sin\beta\sin\varphi; -\cos\beta\}$$

$$\mathfrak{f} = \{\cos\varphi; \sin\varphi; 0\}$$

Abb. 34 Lichteinfall an einem optisch einachsigen Kristall mit räumlich schiefer optischer Achse zur Schnittfläche.

Aus der Einfallsrichtung σ und dem Strahlenellipsoid kann unter Zuhilfenahme des Huygens´schen Prinzips die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ermittelt werden. Führt man noch den Normalenvektor $\mathfrak{n}$ und den Spurvektor $\mathfrak{f}$ ein, so läßt sich $\mathfrak{v}$ durch

$$\mathfrak{v} = -a\mathfrak{n} + f\mathfrak{f} + g(\mathfrak{n}\times\mathfrak{f}) \tag{85}$$

darstellen und die Koeffizienten a, f und g bestimmen. Die Gleichungen für Letztere kann man in folgender Form darstellen:

$$-a\sin\chi\cos\chi\sin\varphi\left(\frac{1}{U_e^2}-\frac{1}{U_o^2}\right)+g\left(\frac{\cos^2\chi}{U_o^2}+\frac{\sin^2\chi}{U_e^2}\right)$$
$$=-\frac{U_e^2}{c}\left(\frac{1}{U_e^2}-\frac{1}{U_o^2}\right)\cos^2\chi\sin\varphi\cos\varphi\sin\beta \tag{86}$$

$$a\sin\chi\cos\chi\cos\varphi\left(\frac{1}{U_e^2}-\frac{1}{U_o^2}\right)+f\left(\frac{\cos^2\chi}{U_o^2}+\frac{\sin^2\chi}{U_e^2}\right)$$
$$=\frac{U_e^2}{c}\left(\frac{1}{U_e^2}+\left(\frac{1}{U_o^2}-\frac{1}{U_e^2}\right)\cos^2\chi\sin^2\varphi\right)\sin\beta \tag{87}$$

$$a^2 = u_o^2 u_e^2 \left\{ \left(\frac{\cos^2\chi}{u_o^2} + \frac{\sin^2\chi}{u_e^2} \right) \left(1 - \frac{u_e^2}{c^2} \sin^2\varphi \sin^2\beta \right) - \frac{1}{c^2} \cos^2\varphi \sin^2\beta \right\}. \tag{88}$$

Bei den verwendeten Prismen ist an den Ein- und Austrittsflächen stets $\chi = 0$. Nach Abb. 8 a), b) ist

$$u_e^2 \left(\frac{1}{u_e^2} - \frac{1}{u_o^2} \right) = \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \approx 10^{-2} \tag{89}$$

und nach Gl. (88) liegt a in jedem Falle in der Größenordnung von u_e (vor allem, wenn χ und β klein). Mit $\chi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ vereinfacht sich (86) zu

$$g = -\frac{1{,}2 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot \frac{u_o^2}{c} \sin\beta = -6 \cdot 10^{-3} \frac{c}{n_o^2} \sin\beta$$

oder

$$g \approx -3 \cdot 10^{-3}\, c \cdot \sin\beta . \tag{90}$$

Die Komponente g ist also das etwa 10^{-3}-fache der zum Lot senkrechten Komponente der einfallenden Welle. D. h. g ist vernachlässigbar.

Für das Prisma A in Abb. 5 wird an der Grenzfläche der Teilprismen $\chi = 8^{\circ}$. Doch hat das keinen Einfluß, weil an dieser Stelle der Strahl das Prisma verläßt und nicht in jenes eintritt. Aus (87) ergibt sich für den Koeffizienten f die Beziehung

$$f = \frac{u_o^2 u_e^2}{c} \left(\frac{1}{u_e^2} + \left(\frac{1}{u_o^2} - \frac{1}{u_e^2} \right) \sin^2\varphi \right) \sin\beta \tag{91}$$

Für die Strahlgeschwindigkeit $v = v(\beta, \varphi)$ folgt mittels

$$v^2(\beta, \varphi) = a^2 + f^2 \tag{92}$$

(Vernachlässigung von g)

$$v^2(\beta,\varphi) = U_e^2\left(1 + \frac{U_e^2 U_o^2 (U_o^2 - U_e^2)}{(\overline{U^2})^2}\,\frac{\sin^2\beta}{c^2}\cos^2\varphi\right) \tag{93}$$

wobei

$$\frac{1}{\overline{U^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_o^2} + \frac{1}{U_e^2}\right) \tag{94}$$

einen Mittelwert der großen Klammer in (91) über φ darstellt. Der Faktor $\frac{U_e^2\,U_o^2}{(\overline{U^2})^2}$ unterscheidet sich von 1 nur um etwa $4\ 10^{-5}$ d. h. er ist praktisch gleich 1. Mit (91) und (93) kann man bilden

$$\sin\beta' = \frac{f}{v} = \frac{U_e}{c}\,\frac{1-\left(1-\left(\frac{U_o}{U_e}\right)^2\right)\cos^2\varphi}{1+\frac{1}{2}\,\frac{U_o^2-U_e^2}{c^2}\sin^2\beta\cos^2\varphi}\,\sin\beta\,. \tag{95}$$

Führt man die in Abb. 8 dargestellten Brechungsindices ein, dann wird

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{1+\frac{1}{2}\,\frac{n_e^2-n_o^2}{n_e^2\,n_o^2}\sin^2\beta\cos^2\varphi}{1-\left(1-\left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2\right)\cos^2\varphi}\,n_e \tag{96}$$

Die Abweichung vom Snellius schen Brechungsgesetz ist, wenn man die n einsetzt, in der Größenordnung 10^{-2}. In erster Näherung ist diese Abweichung also vernachlässigbar.

3) Die Krümmung der Interferenzlinien.

In Abschnitt IV 3 b) wurde die Phasenbeziehung hergeleitet. Sie ergab gerade Interferenzlinien in gleichem Abstand. Bei der Betrachtung des in den Prismen erzeugten Gangunterschieds in Abschnitt IV 2 wurde sowohl der Einfluß eines endlichen Öffnungs- bzw. Einfallswinkels vernachlässigt, als auch die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im Prisma von der Lage der Einfallsebene zur optischen Achse. Diese Effekte zweiter Ordnung verursachen aber bei entsprechend großer Öffnung eine Krümmung der Interferenzlinien.
Der Gangunterschied - abhängig von der Einfallsrichtung - soll nun in höherer Näherung ermittelt und daraus ein

Schluß auf die Krümmung der Interferenzlinien gezogen werden. Die beiden Arten von Wollaston - Prismen (gekreuzte bzw. parallele optische Achsen) zeigen dabei wesentlich voneinander verschiedene Abweichungen in höherer Ordnung. Deshalb ist für beide Fälle die Krümmung der Interferenzlinien jeweils eine andere.

Die Bezeichnungen sind in Abb. 35 angegeben. Der Einfallswinkel ist mit β bezeichnet, seine Komponenten in y- und z - Richtung mit β_y und β_z. Die x-Richtung ist die Achse des optischen Systems. Der Winkel der Einfallsebene mit der z-Richtung ist mit φ bezeichnet. Es gilt

$$tg\,\varphi = \frac{\beta_y}{\beta_z} \tag{97}$$

Durch Multiplikation der β_y, β_z mit einer Länge, etwa einem Schirmabstand, können übliche Koordinaten erhalten werden.

Der Gangunterschied der Vergleichsstrahlen ist eine Funktion von β_y und β_z (neben Apparat- und Materialkonstanten):

$$S = S(\beta_y, \beta_z) \tag{98}$$

Die Interferenzkurven haben dann die Gleichung

$$S(\beta_y, \beta_z) = const. \tag{99}$$

mit einem festen Gangunterschied als Scharparameter, etwa $k\lambda$ mit $k = 1, 2, 3 \ldots$ für Orte größter Helligkeit.

Es ist also notwendig, den Gangunterschied S zu bestimmen, wobei dies für jede Art von Wollastonprisma für sich durchzuführen ist. Den Betrachtungen ist dieinAbb. 35 gewählte Geometrie zugrunde gelegt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Einfallsrichtung β, φ ist durch Gl. (93) gegeben. Wird der dadurch bestimmte Brechungsindex mit n_e (β,φ) bezeichnet, dann ist

$$\frac{c}{v(\beta,\varphi)} = n_e(\beta,\varphi) = n_e\left(1 - \frac{n_e - n_o}{n}\,\frac{\beta^2}{n^2}\cos^2\varphi\right)$$

$$= n_e\left(1 - \frac{n_e - n_o}{n}\,\frac{\beta_z^2}{n^2}\right) \qquad (100)$$

mit $\sin\beta \approx \beta$ und

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_e}\right) \qquad (101)$$

sowie $n_e n_o \approx n^2$.
die gegenseitige Neigung der Teilstrahlen (s. z. B. Abb. 6) läßt sich vernachlässigen.
Die Ermittlung des Gangunterschiedes der beiden Teilstrahlen wird im Folgenden parallel für beide Prismenarten durchgeführt.

<u>Wollastonprisma mit gekreuzten Achsen</u>

Optischer Wegunterschied: $s_\perp$
Abb. 35 a, b, d

$$\begin{aligned} s_\perp = {} & l_{11}\, n_e(\beta, \tfrac{\pi}{2} - \varphi) \\ & + l_{12}\, n_o \\ & + l_{21}\, n_e(\beta, \tfrac{\pi}{2} - \varphi) \\ & + l_{22}\, n_o \\ & - l_{11}\, n_o \\ & - l_{12}\, n_e(\beta,\varphi) \\ & - l_{21}\, n_o \\ & - l_{22}\, n_e(\beta,\varphi) \end{aligned} \qquad (102)$$

<u>Wollastonprisma mit parallelen Achsen</u>

Optischer Wegunterschied: $s_\parallel$
Abb. 35 a, c, d

$$\begin{aligned} s_\parallel = {} & l_{11}\, n_e(\beta,\varphi) \\ & + l_{12}\, n_o \\ & + l_{21}\, n_o \\ & + l_{22}\, n_e(\beta,\varphi) \\ & - l_{11}\, n_o \\ & - l_{12}\, n_e(\beta,\varphi) \\ & - l_{21}\, n_e(\beta,\varphi) \\ & - l_{22}\, n_o \end{aligned} \qquad (103)$$

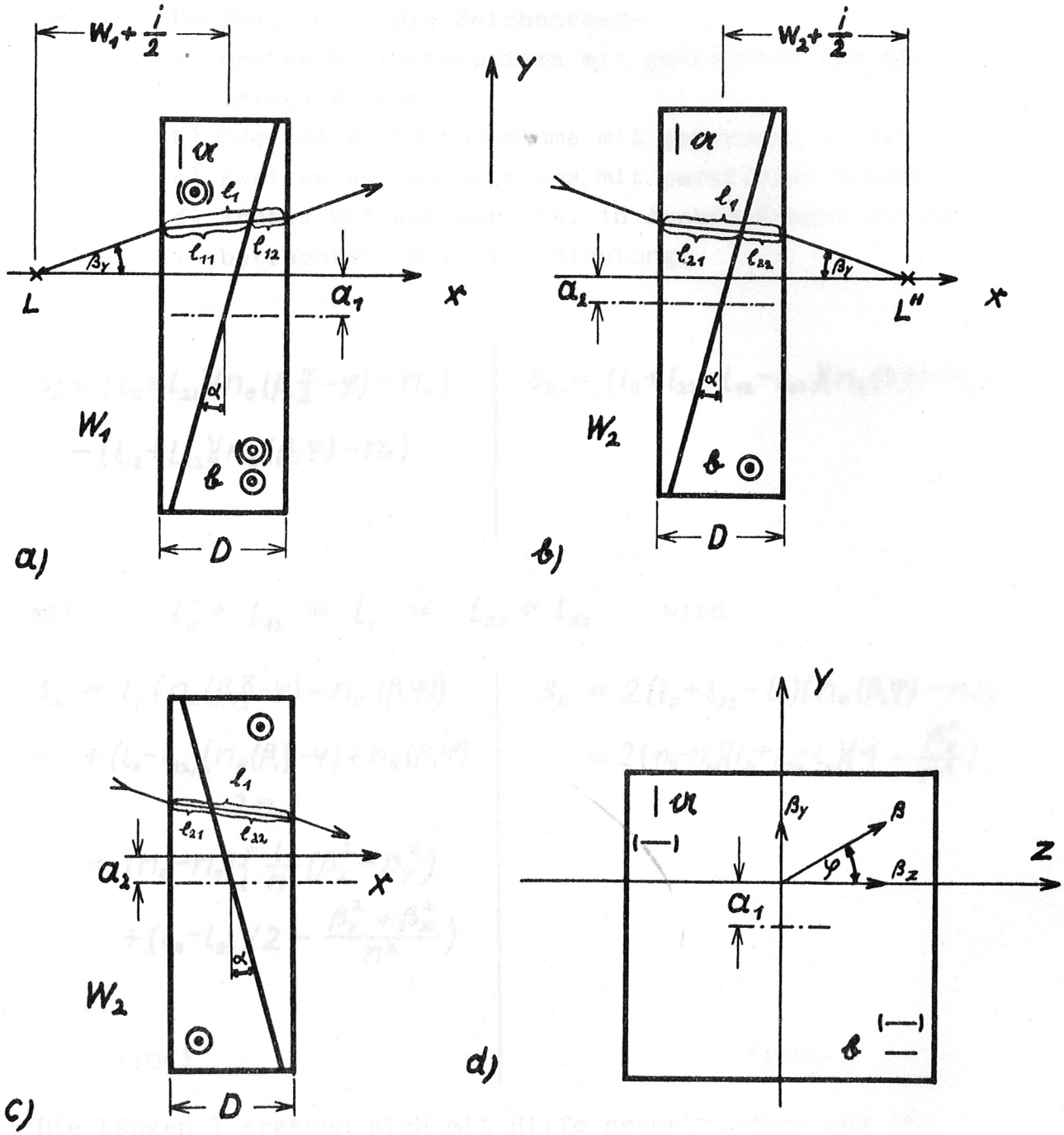


Abb. 35 Lage der Wollasronprismen sowie Bezeichnungen für die Betrachtung des Gangunterschiedes der beiden Teilstrahlen in höherer Ordnung.
Die Bezeichnung der geometrischen Wege gilt für jene im dreidimensionalen Raum und nicht für deren

Projektion in die Zeichenebene.

a) Erstes Wollastonprisma mit gekreuzten (parallelen) Achsen.

b) Zweites Wollastonprisma mit gekreuzten Achsen.

c) Zweites Wollastonprisma mit parallelen Achsen.

d) Erstes Wollastonprisma, in Ausbreitungsrichtung betrachtet (pos. x - Richtung).

$$S_\perp = (l_{11}+l_{21})(n_e(\beta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)-n_o) - (l_{12}+l_{22})(n_e(\beta,\varphi)-n_o)$$

$$S_\parallel = (l_{11}+l_{22}-l_{12}-l_{21})(n_e(\beta,\varphi)-n_o)$$

Mit $l_{11}+l_{12} = l_1 = l_{21}+l_{22}$ wird

$$S_\perp = l_1\left(n_e(\beta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)-n_e(\beta,\varphi)\right) + (l_{11}-l_{22})\left(n_e(\beta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)+n_e(\beta,\varphi)-2n_o\right)$$

$$= (n_e-n_o)\left\{\frac{l_1}{n^2}(\beta_z^2-\beta_y^2) + (l_{11}-l_{22})\left(2-\frac{\beta_y^2+\beta_z^2}{n^2}\right)\right.$$

(104)

$$S_\parallel = 2(l_{11}+l_{22}-l_1)(n_e(\beta,\varphi)-n_o)$$

$$= 2(n_e-n_o)(l_{11}+l_{22}-l_1)\left(1-\frac{\beta_z^2}{n^2}\right)$$

(105)

Die Längen l ergeben sich mit Hilfe geometrischer und optischer Überlegungen zu

$$l_1^2 = D^2\left(1+\frac{\beta_y^2+\beta_z^2}{n^2}\right) \qquad (106)$$

(= D^2 bis auf Größen 2. Ordnung)

$$l_{11}^2 = \left(\frac{D}{2} + \alpha a_1 + \frac{n w_1 + \alpha a_1}{n - \alpha\beta_y}\alpha\beta_y\right)^2 \left(1 + \frac{\beta_z^2}{n^2}\right)$$

und

$$+ \frac{\left(\frac{D}{2} + \alpha\left(a_1 + \left(w_1 - \frac{D}{2n}\right)\beta_y\right)\right)^2}{(n - \alpha\beta_y)^2}\beta_y^2 \qquad (107)$$

l_{22} geht aus l_{11} hervor durch

Vertauschen von α mit $-\alpha$ (aus Abb. 35 a, b ersichtlich) und Index 1 → Index 2.

Es ist

$$l_{11} - l_{22} = \frac{l_{11}^2 - l_{22}^2}{l_{11} + l_{22}} = \frac{l_{11}^2 - l_{22}^2}{D} \qquad (108)$$

Wechsel der Indices Index 1 → Index 2 (aus Abb. 35 a, c ersichtlich).

Es ist

$$2(l_{11} + l_{22} - l_1) = 2l_{11} - l_1 + 2l_{22} - l_1$$

$$= \frac{4l_{11}^2 - l_1^2}{2l_{11} + l_1} + \frac{4l_{22}^2 - l_1^2}{2l_{22} + l_1}$$

$$= \frac{4l_{11}^2 - l_1^2}{2D + l_{11} - l_{22}} + \frac{4l_{22}^2 - l_1^2}{2D + l_{22} - l_{11}} \qquad (109)$$

Bei der Entwicklung von $l_{11} - l_{22}$ bzw. $l_{11} + l_{22} - l_1$ nach Potenzen von β_y und β_z, ausgehend von der in (108) bzw. (109) gegebenen Umformung, zeigt sich, daß die quadratischen Potenzen von β_y, β_z Faktoren mit der Größenordnung $\frac{\alpha w}{n} \ll D$ haben (z. B. $\alpha = 8^\circ$, n = 1,55, w = 10 mm, D = 10 mm gibt $\frac{\alpha w}{n} \approx 1$ mm $= \frac{D}{10}$). In (104) kann statt l_1 auch D gesetzt werden. Es sind also alle aus den l herrührenden quadratischen Glieder in β_y, β_z vernachlässigbar.

Damit wird

$$l_{11} - l_{22} = \alpha\left(a_1 + a_2 + (w_1 + w_2)\beta_y\right) = l_{11} + l_{22} - l_1$$

$$s_\perp = (n_e - n_o)\frac{D}{n^2}(\beta_z^2 - \beta_y^2) + (n_e - n_o)\alpha\left(2 - \frac{\beta_y^2 + \beta_z^2}{n^2}\right) \cdot \left(a_1 + a_2 + (w_1 + w_2)\beta_y\right) \qquad (110)$$

$$s_\parallel = 2\alpha(n_e - n_o)\left(a_1 + a_2 + (w_1 + w_2)\beta_y\right) \cdot \left(1 - \frac{\beta_z^2}{n^2}\right) \qquad (111)$$

Betrachtung der Krümmung

Die Krümmung der Interferenzlinien mit den Scharparametern $s_\perp, s_\parallel$ ist durch ($s_\perp$, $s_\parallel$ = s)

$$K = -\frac{s_{zz}\, s_y^2 - 2\, s_{yz}\, s_y s_z + s_{yy}\, s_z^2}{(s_y^2 + s_z^2)^{3/2}} \qquad (112)$$

gegeben, wobei $s_y = \frac{\partial s}{\partial \beta_y}$ usw. ist.
Wenn (110) bzw. (111) in (112) eingesetzt wird, dann ergibt sich unter der Voraussetzung, daß $w_1 + w_2$ in der Größenordnung von D oder größer ist, für die Krümmungen:

$$K_\perp = -\frac{D - \alpha(a_1 + a_2)}{n^2 \alpha (W_1 + W_2)} \qquad (113)$$

In der Regel ist $\alpha(a_1 + a_2) \ll D$ d. h.

$$K_\perp = -\frac{D}{\alpha n^2 (W_1 + W_2)} < 0 \qquad (115)$$

$$K_\parallel = 2\,\frac{a_1 + a_2 + (W_1 + W_2)\beta_y}{n^2 (W_1 + W_2)} \qquad (114)$$

Für $\beta_y = 0$ ist

$$K_\parallel = 2\,\frac{a_1 + a_2}{n^2 (W_1 + W_2)}$$

$$\left(\approx \frac{1}{10} \text{ in der Regel}\right) \qquad (116)$$

Die Krümmung ist in jedem Falle proportional zum Streifenabstand (nach Gl. (59)) und hängt nicht von der Wellenlänge ab.
Beispiel: $a_1 + a_2 = 0$, $n = 1{,}55$, $w_1 = w_2 = 22$ mm $D = 10$mm, $\alpha = 8^\circ$
Dann ist

$$K_\perp = -0{,}676 = \text{const.} \qquad (117)$$

$$K_\parallel = \frac{2\beta_y}{n^2} = 0{,}83\,\beta_y \qquad (118)$$

Da angenähert $K = \frac{d^2\beta_y}{d\beta_z^2}$ gilt, wird mit $\beta_y = \beta_{y_0}$ und, aus Symmetriegründen, $\frac{d\beta_y}{d\beta_z} = 0$ für $\beta_z = 0$

$$\beta_y = \beta_{y_0} - 0{,}676\,\frac{\beta_z^2}{2} \qquad (119)$$

$$\beta_y = \left(1 + 0{,}83\,\frac{\beta_z^2}{2}\right)\beta_{y_0} \qquad (120)$$

Wie groß kann die kreisförmige Öffnung β_{max} in beiden Fällen gewählt werden, damit die maximal auftretende Abweichung der Interferenzlinien von Geraden auf Grund der Krümmung einen gewissen Wert, etwa eine Streifenbreite nicht überschreitet?

Der Winkelabstand zweier Interferenzstreifen ist für $w_1 = w_2 = 22$ mm, $\lambda = 5461$ Å (und $\beta_z = 0$) durch

$$\Delta\beta_y = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$$ (Bogen) gegeben.

Es ist also gefordert

$$\beta_{y_0} - \beta_{y_{Rand}} = \Delta\beta_y \qquad \beta_{y_{Rand}} - \beta_{y_0} = \Delta\beta_y \quad (\beta_{y_0} > 0)$$

Maximale Änderung von β_y mit β_z ergibt sich

bei $\beta_{y_0} = 0$ (Der ganze Durchmesser wird bestrichen)

$$0{,}676\,\frac{\beta_{\perp max}^2}{2} = \Delta\beta_y = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$$

aus (120) und der Bedingung

$$\beta_{y_0}^2 + \beta_z^2 = \beta_{\parallel max}$$

$$0{,}83\,\frac{\sqrt{3}}{9}\,\beta_{\parallel max}^2 = \Delta\beta_y = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$$

Daraus folgt

$$\beta_{\perp max} = 0{,}12 = \frac{1}{8{,}3}$$

d. h. Öffnung $\frac{1}{4{,}2}$

$$\beta_{\parallel max} = 0{,}38 = \frac{1}{2{,}6}$$

d. h. Öffnung $\frac{1}{1{,}3}$

Aus dem Vergleich geht hervor, daß für größere Öffnungen das Wollastonprisma mit parallelen Achsen dem mit gekreuzten Achsen vorzuziehen ist.

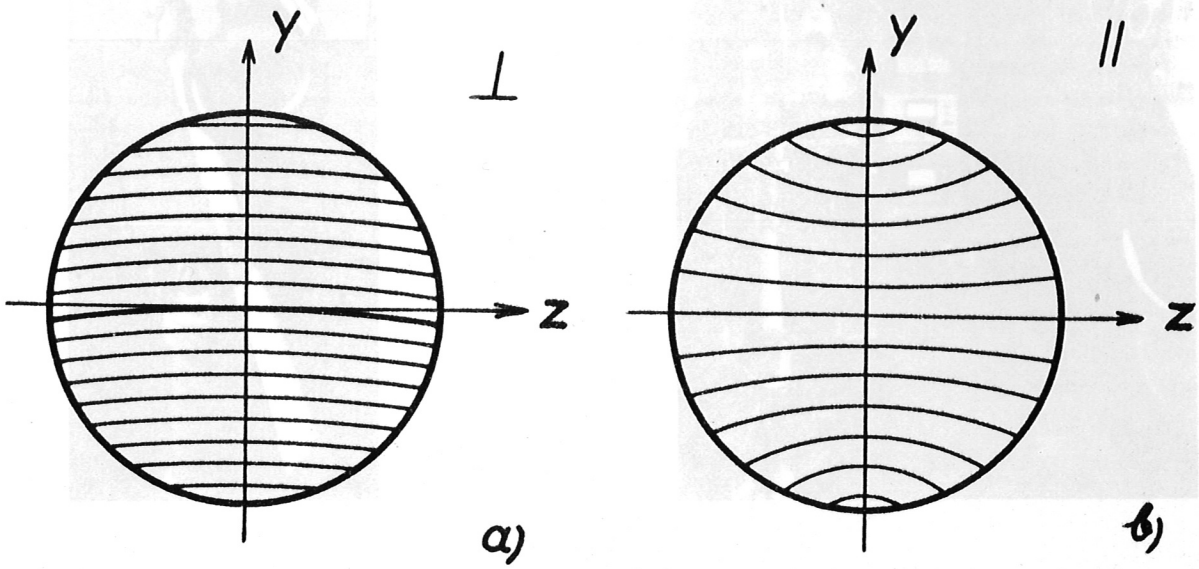


Abb. 36 Typische Interferenzlinienfelder
a) Für Prismen mit gekreuzten optischen Achsen.
b) Für Prismen mit parallelen optischen Achsen.

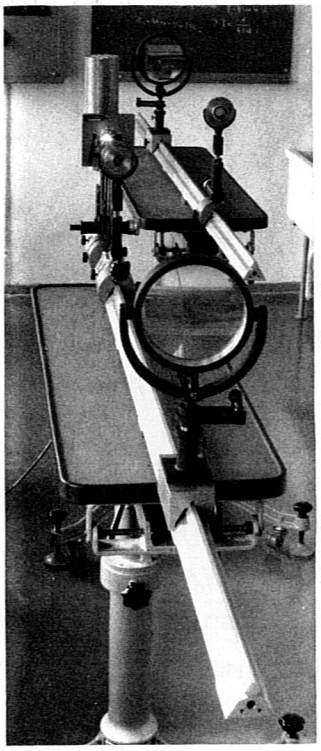


Abb. 37
Differentialinterferometer

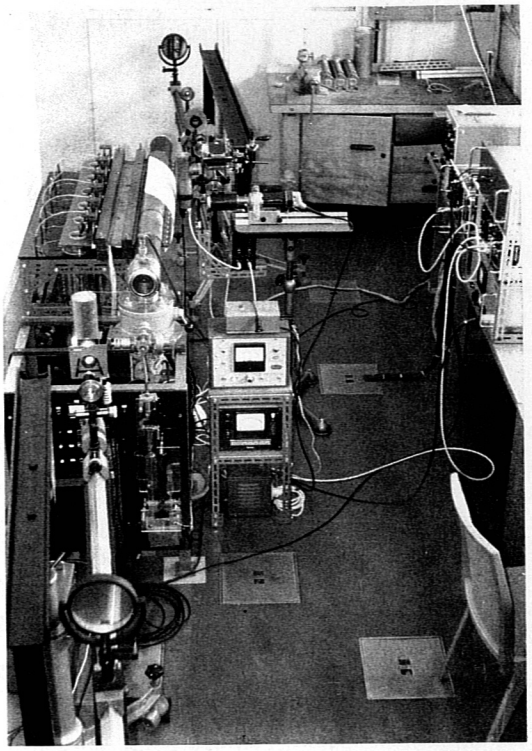


Abb. 38
Differentialinterferometer mit Schmierkamera am Theta-pinch.

Inhaltsverzeichnis zum Anhang

		Seite
1)	Zusätzliche Bemerkungen zum Differential-interferometer	
	a) Vertauschung der Maxima und Minima	I
	b) Die Drehung der Polarisationsebene bei der Reflexion an den Spiegeln	II
	c) Drehung der Polarisationsebene durch den Faraday - Effekt	II
2)	Die Strahlrichtung im Kristall	III
3)	Die Krümmung der Interferenzlinien	VI

Meinen besonderen Dank möchte ich Herrn Prof. Fünfer für die Möglichkeit, diese Arbeit durchzuführen und für seine Anteilnahme daran aussprechen.

Ebenso danke ich Herrn Dr. Andelfinger für seine freundliche Betreuung und seinen Rat bei der Durchführung der Arbeit.

Herrn Dipl. Ing. F. Lindenberger möchte ich wegen seiner großen Hilfe bei der Besorgung der elektronischen Einrichtung danken.